

# Lineare Algebra 1

## 1. Übungsblatt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

M. Schneider

Konstantin Pertschik, Daniel Körnlein

12.04.2012

### Gruppenübung

#### Aufgabe G1 (Logisch?)

- (a) Folgt aus „Wenn es regnet, gibt es Wolken.“, dass es keine Wolken gibt, wenn es nicht regnet?  
(b) Stellen Sie den obigen Schluss mithilfe der Aussagenlogik dar und begründen Sie, warum er falsch ist.

#### Aufgabe G2 (Beweise mithilfe der Wahrheitstafeln)

Welche der folgenden aussagelogischen Formeln sind allgemein gültig? Welche sind immer falsch? Welche sind zueinander äquivalent?

- (a)  $p \vee \neg p$   
(b)  $p \Rightarrow (q \vee \neg q)$   
(c)  $p \wedge \neg p$   
(d)  $p \vee p$   
(e)  $p \wedge p$   
(f)  $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$

#### Aufgabe G3 (Mengenoperationen)

Seien  $M$  eine Menge und  $A, B$  und  $C$  Teilmengen von  $M$ .

- (a) Beweisen Sie  $A \cup B = B \cup A$  und  $A \cap B = B \cap A$ .  
(b) Vervollständigen und beweisen Sie  $A \cup \emptyset = ?$  und  $A \cap \emptyset = ?$ .  
(c) Vergleichen Sie  $(A \cup B) \cup C$  und  $A \cup (B \cup C)$ . Welche einfachere Notation kann man daraus herleiten?

Gibt es ähnliche Regeln in der Aussagenlogik?

#### Aufgabe G4 (Quantoren)

Entscheiden Sie, welche Aussagen über die natürlichen Zahlen wahr sind.

- (a)  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq n$   
(b)  $\exists n \in \mathbb{N} : 3 \leq n$   
(c)  $\forall n \in \mathbb{N} : 3 \leq n$   
(d)  $\forall n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : k = 2n$   
(e)  $\exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : k = 2n$   
(f)  $\forall k \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : k = 2n$

Begründen Sie Ihre Antworten.

#### Aufgabe G5 (Kartesisches Produkt)

- (a) Was sind die Elemente des Produkt  $(\{1, 2, 3\} \times \{4, 5\})$ ?  
(b) Was sind die Elemente des Produkts  $\{1, 2, 3\} \times \{0\}$ ?  
(c) Sei  $A$  eine Menge mit  $n$  Elemente. Wie viele Elemente gibt es in  $A \times \{3\}$ ?  
(d) Was sind die Elemente des Produkts  $\{1, 2, 3\} \times \emptyset$ ? Was ist eigentlich die Menge  $\{1, 2, 3\} \times \emptyset$ ?

---

---

## Hausübung

---

### Aufgabe H1 (Wahrheitstafeln)

(6 Punkte)

Weisen Sie nach, dass die folgenden Aussagen allgemeingültig sind, indem Sie Wahrheitstafeln aufstellen.

- (a)  $p \leftrightarrow p$
- (b)  $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (q \leftrightarrow p)$
- (c)  $((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$

### Aufgabe H2 (Quantoren, de Morgansche Regeln)

(5 Punkte)

Sei  $M$  eine Menge. Drücken Sie die Negationen der folgenden Aussagen so aus, dass die Negationssymbole so weit rechts wie möglich stehen.

- (a)  $\forall x \in M : \exists y \in M : P(x, y)$
- (b)  $\forall x \in M : P(x) \vee Q(x)$
- (c)  $\forall x \in M : P(x) \vee (\forall y \in M : Q(y))$
- (d)  $\forall x \in M : P(x) \vee (\exists y \in M : Q(x, y) \wedge R(y))$
- (e)  $\forall x \in M : \exists y \in M : (P(y) \Rightarrow y = x)$

### Aufgabe H3 (Mengen)

(5 Punkte)

Seien  $M$  eine Menge und  $A$  und  $B$  Teilmenge von  $M$ . Vergleichen Sie die folgenden Mengen.

- (a) Vergleichen Sie  $M \setminus (A \cup B)$  und  $(M \setminus A) \cap (M \setminus B)$ .
- (b) Vergleichen Sie  $M \setminus (A \cap B)$  und  $(M \setminus A) \cup (M \setminus B)$ .
- (c) Vergleichen Sie  $(M \setminus A) \setminus B$  und  $(M \setminus B) \setminus A$ .
- (d) Vergleichen Sie  $(M \setminus A) \setminus B$  und  $M \setminus (B \setminus A)$ .

Gibt es ähnliche Regeln in der Aussagenlogik?