Lineare Algebra II für Physiker
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Carsten Rösnick

SS 2012
25.06.2011

Abgabe des 6. Übungsblattes ist am **Mittwoch, den 04.07.12, bis 12 Uhr** (wie auf der Veranstaltungsseite beschrieben) in den jeweiligen Kästen in S2|15, 2. Etage.
Bewertet werden die Hausübungen; bei Aufgaben versehen mit einem ($\star$) handelt es sich um *Bonusaufgaben*, durch die Sie sich zusätzliche Punkte erarbeiten können.

Gruppenübung

Aufgabe G1
Bestimmen Sie die Jordan-Normalformen der Matrizen $A, B \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G2
Sei V_n der Vektorraum der Polynome vom Grad $< n$.

(a) Rechnen Sie nach, dass V_n ein Prähilbertraum wird mit

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{+1} p(t) \cdot q(t)\, dt.$$

(b) Finden Sie eine Orthonormalbasis von V_3, indem Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die *Monome* $1, x, x^2$ anwenden.

(c) Bestimmen Sie einen Vektor $q \in V_3$ mit $\langle p, q \rangle = p(0)$ für alle $p \in V_3$ gemäß Satz 6.1.1c) aus dem Skript.
Tipp: Betrachten Sie die Abbildung $L : V_n \to \mathbb{K}$, $L(p) = p(0)$.

($\star$d) Berechnen Sie $\int_{-1}^{+1} (ax^2 + bx + c)(9 - 15x^2)/8\, dx$.

Aufgabe G3
Sei A eine 2×2 Jordan-Matrix (öfter auch: Jordan-*Block*). Berechnen Sie A^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (2+2+1 Punkte)
Sei, wie in G2, V_n der Vektorraum der Polynome vom Grad $< n$.

(a) Bestimmen Sie eine Jordan-Normalform zum Differentiationsoperator $\frac{d}{dx}$ auf V_n.

(b) Finden Sie eine Orthonormalbasis von V_4.

(c) Ist $\frac{d}{dx}$ normal auf V_3?

Aufgabe H2 (1+2+1 Punkte)

(a) Bekanntlich gilt $\sum_n x^n/n! = \exp(x) = \exp'(x) = \sum_n n \cdot x^{n-1}/n!$. Berechnen Sie $\exp(A)$ für eine beliebige 2×2 Jordan-Matrix A.

Sei nun A eine beliebige 3×3 Jordan-Matrix.

(b) Berechnen Sie A^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

(c) Berechnen Sie $\exp(A)$.

Aufgabe H3 (Trägheitstensor) (1+2 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Menge von Massepunkten und $\rho : M \to [0, \infty)$ eine Gewichtsfunktion, so können wir den *Trägheitstensor* definieren durch

$$T = (t_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}, \qquad t_{ij} = \sum_{\vec{x}=(x_1,x_2,x_3) \in M} \rho(\vec{x}) \left(|\vec{x}|^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right)$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta sei.[1] Zeigen Sie:

(a) T ist symmetrisch.

(b) T ist positiv semi-definit.

Aufgabe H4 ($\star$1+$\star$1+$\star$1 Punkte)

Sei $U := C_0^\infty[-1, 1]$ die Menge der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen $f : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ mit $f^{(d)}(-1) = f^{(d)}(+1) = 0$ für alle $d \in \mathbb{N}$.

($\star$a) Rechnen Sie nach, dass dies ein Prähilbertraum ist mit

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot \bar{g}(x)\, dx.$$

($\star$b) Bestimmen Sie den zu $i\frac{d}{dt}$ adjungierten *(Impuls-)*Operator auf U.
Tipp: Verwenden Sie partielle Integration.

($\star$c) Betrachten Sie den *(Orts-)*Operator, der $f(x) \in U$ auf die Funktion $x \cdot f(x)$ abbildet. Zeigen Sie, dass dies ein Operator auf U ist und bestimmen Sie seinen adjungierten Operator.

Der Matheball

Dieses Jahr findet der 21. Ball der Mathematiker am 7.7.2012 um 20:00 Uhr statt.
Vorverkauf: dienstags 11:40 Uhr, donnerstags 9:50 Uhr im Fachschaftsraum 347 (Mathebau).
VVKPreis: 12 Euro ermäßigt (Studenten, Jugendliche, Mitarbeiter), sonst 14 Euro.
An der Abendkasse gibt es 2 Euro Aufschlag.
Je früher ihr die Karten kauft, desto eher könnt ihr euch eure guten Plätze in der Halle aussuchen.
Weitere Infos auf `www.mathebau.de/matheball`
Wir freuen uns auf euch!

[1] $\delta_{ij} = 1$ genau dann, wenn $i = j$, und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$.