# Lineare Algebra II für Physiker
# 5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Martin Ziegler**
Carsten Rösnick

**SS 2012**
**11.06.2011**

Abgabe des 5. Übungsblattes ist am **Mittwoch, den 20.06.12, bis 12 Uhr** (wie auf der Veranstaltungsseite beschrieben) in den jeweiligen Kästen in S2|15, 2. Etage.
Bewertet werden die Hausübungen; bei Aufgaben versehen mit einem ($\star$) handelt es sich um *Bonusaufgaben*, durch die Sie sich zusätzliche Punkte erarbeiten können.

## Gruppenübung

**Aufgabe G1**

(a) Welche Aussage können Sie mit Hilfe des Satzes 4.14.2 über die Existenz einer $LU$–Zerlegung der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

treffen?

(b) Berechnen Sie die $LU$–Zerlegung der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wieso steht die Zerlegbarkeit von $B$ nicht im Widerspruch zu Satz 4.14.2?

**Aufgabe G2**

Gegeben Sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine $LUP$–Zerlegung von $A$, d.h. bestimmen die eine untere Dreiecksmatrix $L$, eine obere Dreiecksmatrix $U$ und eine Permutationsmatrix $P$ so dass $LU = PA$.

**Aufgabe G3**

Sei

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 6 & 9 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Spektrum von $A$, die zugehörigen Eigenräume und deren geometrische sowie algebraische Vielfachheit. Gibt es eine Basis aus Eigenvektoren?

**Aufgabe G4**

Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix und $\lambda \neq 0$ ein Skalar aus $\mathbb{K}$. Wie im Skript Abschnitt 5.4 bezeichne $p_B(\lambda) := \mathrm{Det}(B - \lambda I_n)$ das charakteristische Polynom zur Matrix $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie:

$$(-\lambda)^n \cdot p_A(1/\lambda) = \mathrm{Det}(A) \cdot p_{A^{-1}}(\lambda)$$

## Hausübung

**Aufgabe H1** (1+1+1.5+0.5+0.5+0.5 Punkte)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie (mit Begründung!)

(a) das charakteristische Polynom von $A$,

(b) das Spektrum von $A$,

(c) die zugehörigen Eigenräume,

(d) die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte, sowie

(e) ihre algebraischen Vielfachheiten, und

(f) ob die Matrix $A$ diagonalisierbar ist.

**Aufgabe H2** (2 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ beliebige Skalare. Zu dem Polynom

$$P(X) := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X^1 + a_0$$

definieren wir die Matrix $B(P)$ wie folgt:

$$B(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$$

Zeigen Sie: Für das charakteristische Polynom von $B(P)$ gilt $p_{B(P)}(\lambda) = (-1)^n \cdot P(\lambda)$.

*Hinweis*: Probieren Sie es mit Induktion über die Dimension $n$, indem Sie die Determinante geschickt entwickeln.

**Aufgabe H3** (Quantenteilchen im Kastenpotential) (1+1+0.5 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$V := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \qquad \text{mit} \qquad V_n := \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in C^\infty[0,1] \text{ (unendlich oft stetig differenzierbar)} \\ \text{und es gilt } f^{(2k)}(0) = f^{(2\ell)}(1)\ \forall\, 0 \le k, \ell \le n \end{array} \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass $V$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum ist.

(b) Definiere

$$\partial^2 : V \to V, \quad \partial^2(f) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Zeigen Sie, dass es sich bei $\partial^2$ um eine lineare Abbildung handelt.

(c) Zeigen Sie, dass $-\pi^2 n^2$ ein Eigenwert von $\partial^2$ ist, indem Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen konkreten Eigenvektor zu besagtem Eigenwert angeben.

**Aufgabe H4** (1+1+0.5 Punkte)

Sei $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine *symmetrische* Matrix (d.h. $a_{ij} = a_{ji}$) mit *reellen* Einträgen. Zeigen Sie:

(a) Die Eigenwerte von $A$ sind reellwertig.
*Hinweis:* Nehmen Sie an, $\lambda \in \mathbb{C}$ sei ein Eigenwert von $A$ und nutzen Sie die Definition von Eigenvektoren zu Eigenwerten aus.

(b) Seien $\lambda_1, \lambda_2$ zwei Eigenwerte von $A$ und $v_1, v_2$ zugehörige Eigenvektoren. Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und gilt überdies $\overline{A}^{\mathrm{T}} = A$, so sind die Eigenvektoren $v_1, v_2$ zueinander orthogonal.

(c) Ist $A$ zusätzlich *positiv semi-definit* (d.h. $v^{\mathrm{T}} A v \ge 0$ für alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$), so sind alle Eigenwerte $\lambda$ von $A$ nicht-negativ ($\lambda \ge 0$).