Lineare Algebra II für Physiker
4. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Carsten Rösnick

SS 2012
28.05.2011

Abgabe des 4. Übungsblattes ist am **Mittwoch, den 06.06.12, bis 12 Uhr** (wie auf der Veranstaltungsseite beschrieben) in den jeweiligen Kästen in S2|15, 2. Etage.
Bewertet werden die Hausübungen; bei Aufgaben versehen mit einem ($\star$) handelt es sich um *Bonusaufgaben*, durch die Sie sich zusätzliche Punkte erarbeiten können.

Gruppenübung

Aufgabe G1
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Berechnen Sie die Determinate der Matrix

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit des Paramters λ. Für welche λ ist die Matrix A_λ invertierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls die Inverse A_λ^{-1} über die adjunkte Matrix. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe G2

(a) Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Die Spur von A ist über

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

definiert. Zeigen Sie, dass für eine invertierbare Matrix $S \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ gilt:

$$\mathrm{Spur}(SAS^{-1}) = \mathrm{Spur}(A)$$

(b) Sei $A = (a_{ij}) \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Det}(A - \lambda \mathrm{id}) = \lambda^2 - \lambda \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Det}(A).$$

Aufgabe G3 (Determinanten von Blockmatrizen)
Sei $n, m \in \mathbb{N}$ und seien $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $C \in M_{m,m}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & C \end{pmatrix} = \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(C)$$

Aufgabe G4
Sei $\sigma = (134)(25)$ eine Permutation von 5 Elementen. Schreiben Sie σ als Produkt von Transpositionen und bestimmen Sie die Parität der Anzahl dieser Transpositionen[1], das Vorzeichen von σ und die Anzahl der Inversionen von σ sowie deren Parität.

[1] *Parität:* 1, falls es sich um eine gerade, und -1, sofern es sich um eine ungerade Zahl handelt.

Hausübung

Aufgabe H1 (1.5+1.5 Punkte)

Sei $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und B eine *Orthonormalbasis* folgender Form:

$$B = \left\{ b_1 = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i1} e_i, \ \dots, \ b_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_{in} e_i \right\}$$

(a) Rechnen Sie zunächst im $\mathbb{R}^2$ nach, dass es sich bei

$$S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

um eine Basiswechselmatrix $S_\varphi = M_I^{E_n, B_\varphi}$ handelt.
Hinweis: Überlegen Sie sich, wie B_φ definiert sein muss und anschließend, was S_φ erfüllen muss, um eine Basiswechselmatrix zu sein.

(b) Geben Sie nun ganz allgemein die Basiswechselmatrizen $S = M_I^{E_n, B}$ und S^{-1} an.

Aufgabe H2 (1.5+0.5 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n-1$ seien $z_k = \exp(-2\pi i \cdot k/n)$ die Koeffizienten der *diskreten Fourier-Transformation*.

(a) Zeigen Sie, dass die Spalten der Matrix

$$\mathrm{DFT}_n(z_0, \dots, z_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(z_k^\ell \right)_{0 \leq k, \ell \leq n-1}$$

paarweise *orthonormal* sind.
Hinweis: Erinnern Sie sich an die Summenformel für geometrische Reihen.

(b) Berechnen Sie $|\mathrm{Det}(\mathrm{DFT}_n(z_0, \dots, z_{n-1}))|$.
Hinweis: Sie können Blatt 3, Aufgabe H4 verwenden.

Aufgabe H3 (1.5+1+2($\star$) Punkte)

Gegeben sei die folgende (sog. *Vandermonde*–)Matrix:

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Wir wollen nun beweisen, dass die Determinante der Vandermonde-Matrix gegeben ist als

$$\mathrm{Det}(V(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \tag{1}$$

(a) Rechnen Sie zunächst nach, dass für alle Matrizen $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$ und Indizes i, j gilt:

$$\mathrm{Det}(A \cdot \tilde{S}^\lambda_{II,i,j}) = \mathrm{Det}(A), \qquad \mathrm{Det}(S^\lambda_{I,i} \cdot A) = \lambda \mathrm{Det}(A)$$

(b) Zeigen Sie Aussage (1) für $n = 1$. Berechnen Sie überdies

$$\left(\prod_{i=2}^{n} S_{I,\mathbf{i-1}}^{x_i - x_1}\right) \cdot V(x_2, \dots, x_n)$$

Achtung: In der früheren Version dieses Blattes hieß es $S_{I,\mathbf{i}}^{x_i-x_1}$ statt nun $S_{I,\mathbf{i-1}}^{x_i-x_1}$. Die Matrizen waren so jedoch nicht kompatibel (falsche Dimensionen). Durch die Änderung haben wir nun $S_{I,\mathbf{i-1}}^{x_i-x_1} \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{K})$.

($\star$) Fügen Sie nun alles zusammen und folgern daraus die Aussage (1).

Aufgabe H4 (Determinanten von Blockmatrizen) (1+0.5 Punkte)

Sei $n, m \in \mathbb{N}$ und seien $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $C \in M_{m,m}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ C & B \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \cdot \operatorname{Det}(A) \cdot \operatorname{Det}(C)$

(b) Seien A und C invertierbar. Berechnen Sie $\operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}\right)$.

Aufgabe H5 (1.5+1.5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Inversionen der Transposition $\tau = (i\ j) \in S_n$.

(b) Es sei P_σ für $\sigma \in S_n$ eine Permutationsmatrix. Zeigen Sie, dass auch die transponierte Matrix ${P_\sigma}^{\mathrm{T}}$ wieder eine Permutationsmatrix $P_{\hat{\sigma}}$ ist, indem Sie eine Permutation $\hat{\sigma} \in S_n$ berechnen, so dass ${P_\sigma}^{\mathrm{T}} = P_{\hat{\sigma}}$.