Lineare Algebra II für Physiker
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Carsten Rösnick

SS 2012
14.05.2011

Abgabe des 3. Übungsblattes ist am **Mittwoch, den 23.05.12, bis 12 Uhr** (wie auf der Veranstaltungsseite beschrieben) in den jeweiligen Kästen in S2|15, 2. Etage.
Bewertet werden die Hausübungen; bei Aufgaben versehen mit einem ($\star$) handelt es sich um *Bonusaufgaben*, durch die Sie sich zusätzliche Punkte erarbeiten können.
Abschließend noch ein Appell: Nutzen Sie, bei Fragen zur Vorlesung oder Hausübung, neben der Übung ruhig auch die Sprechstunden. Diese stellen einen Service für **Sie** dar!

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Warm-Up I)

(a) Gegeben sei die lineare Abbildung $T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, $T(e_i^{(3)}) := e_i^{(3)}$, wobei $e_i^{(k)}$ der i-te Einheitsvektor des $\mathbb{K}^k$ sei. Es sei überdies $\mathscr{L} = \{e_1^{(3)}, e_2^{(3)}, e_3^{(3)}\}$ die Standardbasis des $\mathbb{K}^3$, und $\tilde{\mathscr{L}} = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_i := e_{4-i}^{(3)}$ eine weitere Basis des $\mathbb{K}^3$. Bestimmen Sie $M_T^{\mathscr{L},\mathscr{L}}$ und $M_T^{\tilde{\mathscr{L}},\mathscr{L}}$.

(b) Gegeben sei die lineare Abbildung $T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^4$ durch

$$T(e_i^{(3)}) := i \cdot e_i^{(4)} + (i+1) \cdot e_{i+1}^{(4)} \qquad \text{für } i = 1, \dots, 3.$$

Bestimmen Sie Basen $\mathscr{L}$ und $\mathscr{L}'$, so dass

$$M_T^{\mathscr{L},\mathscr{L}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Schauen Sie sich ggf. noch einmal die Abschnitte 3.5 und 3.6 im Skript an.

Aufgabe G2 (Warm-Up II)

Sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ mit $n \neq m$. Welche der folgenden Bedingungen implizieren (j) bzw. treffen keine Aussage (-) für/über die Injektivität von A? Welche Aussagen implizieren, dass A *nicht* injektiv ist (n)? Welche Aussagen kommen nicht vor bzw. ergeben keinen Sinn (x)?

☐	$\mathrm{Rang}(A) = n$	☐	$\mathrm{Rang}(A) < n$	☐	$\mathrm{Rang}(A) > n$	☐	$\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{K}^n$
☐	$\mathrm{Rang}(A) = m$	☐	$\mathrm{Rang}(A) < m$	☐	$\mathrm{Rang}(A) > m$	☐	$\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{K}^m$
☐	$\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$	☐	$\mathrm{Kern}(A) = \emptyset$	☐	$\mathrm{Kern}(A) \supsetneq \{0\}$		
☐	$\mathrm{Kern}(A) = \mathbb{K}^n$	☐	$\mathrm{Kern}(A) = \mathbb{K}^m$				

Aufgabe G3

(a) Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Det}(A) = 0$, falls die *Zeilen* von A l.a. sind.

(b) Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Sie können entweder (EU) verwenden, um das Problem auf eine obere bzw. untere Dreiecksmatrix zu reduzieren und dann Satz 4.8.3 anwenden.

Aufgabe G4

Betrachten wir die Linearform $L_v := \langle v \mid \cdot \rangle$, $v \in \mathbb{K}^n$.[1]

(a) Sei $\mathscr{L}$ die Standardbasis des $\mathbb{K}^n$. Geben Sie die zu $\mathscr{L}$ duale Basis $\mathscr{L}^*$ von $(\mathbb{K}^n)^*$ an.

(b) Drücken Sie L_v bezüglich der dualen Basis $\mathscr{L}^*$ aus.

Hausübung

Aufgabe H1 (Surjektivität von Matrizen) (2 Punkte)

Sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ mit $n \neq m$. Welche der folgenden Bedingungen implizieren (j) bzw. treffen keine Aussage (-) für/über die Surjektivität von A? Welche Aussagen implizieren, dass A *nicht* surjektiv ist (n)? Welche Aussagen kommen nicht vor bzw. ergeben keinen Sinn (x)?

☐ $\mathrm{Rang}(A) = n$	☐ $\mathrm{Rang}(A) < n$	☐ $\mathrm{Rang}(A) > n$	☐ $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{K}^n$
☐ $\mathrm{Rang}(A) = m$	☐ $\mathrm{Rang}(A) < m$	☐ $\mathrm{Rang}(A) > m$	☐ $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{K}^m$
☐ $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$	☐ $\mathrm{Kern}(A) = \emptyset$	☐ $\mathrm{Kern}(A) \supsetneq \{0\}$	
☐ $\mathrm{Kern}(A) = \mathbb{K}^n$	☐ $\mathrm{Kern}(A) = \mathbb{K}^m$		

Aufgabe H2 (2 Punkte)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen LGS $Ax = b_i$ für

$$b_1 = (1,2,3)^T \quad \text{und} \quad b_2 = (-1,2,3)^T$$

mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren (vgl. Skript S.52).

Aufgabe H3 (1+1+1 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -60 & 0 & -30 \\ 8 & -1 & 4 \\ 14 & 12 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Hier haben wir ganz bewusst die Bra-Ket-Notation (`http://de.wikipedia.org/wiki/Bra-Ket`) verwendet, die so dem Skalarprodukt $\langle v, w \rangle$ entspricht. Die Linearform L_v ist demnach einfach Bra: $L_v = \langle v| \in V^*$.

Aufgabe H4 (1+0.5+0.5 Punkte)

(a) Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass gilt: $\operatorname{Det}(\overline{A}) = \overline{\operatorname{Det}(A)}$.
Hinweis: Es bezeichne $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})_{ij}$ die aus $A = (a_{ij})_{ij}$ durch komplexe Konjugation entstehende Matrix. *Hinweis 2*: Per Induktion über n, plus Zuhilfenahme von Erkenntnissen aus der Vorlesung zur Berechnung der Determinante, lässt sich die Aussage bspw. zeigen.

($\star$) Eine *reelle* Matrix $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ heißt *orthogonal*, falls $B \cdot B^{\mathrm{T}} = I_n$.
Zeigen Sie: Für reelle orthogonale Matrizen B gilt $\operatorname{Det}(B) \in \{-1, +1\}$.

($\star$) Eine *komplexe* Matrix $C \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ heißt *unitär*, falls $C \cdot C^* = I_n$.
Was können Sie in diesem Fall über $\operatorname{Det}(C)$ sagen?

Aufgabe H5 (1+1.5+1.5 Punkte)

Es sei $V := \mathbb{K}^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Für alle $v \in V$ betrachten wir nun die Linearform $L_v \in (V^*)^* = \mathscr{L}(V^*, \mathbb{K})$, definiert durch $L_v(\phi) := \phi(v)$. Desweiteren definieren wir mittels L_v eine Abbildung ι wie folgt:

$$\begin{aligned} \iota : V &\to (V^*)^*, \\ v &\mapsto L_v \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass ι (a) wohldefiniert, (b) $\mathbb{K}$-linear und (c) injektiv ist.