Lineare Algebra II für Physiker
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Carsten Rösnick

SS 2012
16.04.2011

Abgabe des 1. Übungsblattes ist am **Mittwoch, den 25.04 bis 12 Uhr** (wie auf der Veranstaltungsseite beschrieben) in den jeweiligen Kästen in S2|15, 2. Etage.
Bewertet werden die Hausübungen; bei Aufgaben versehen mit einem ($\star$) handelt es sich um *Bonusaufgaben*, durch die Sie sich zusätzliche Punkte erarbeiten können.

Gruppenübung

Aufgabe G1

Seien $A = (a_1, \dots, a_m)^T \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ mit $a_k \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $k = 1, \dots, m$, und A_I^λ, A_{II}^λ, A_{III}, S_I^λ, S_{II}^λ wie in Abschnitt 4.2 Beobachtung (c), das heißt:

$$\begin{aligned}
A_I^\lambda &= (a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i, a_{i+1}, \dots, a_m)^T, && i \in \{1, \dots, m\}\\
A_{II}^\lambda &= (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \lambda a_j, a_{i+1}, \dots, a_m)^T, && i, j \in \{1, \dots, m\}\\
A_{III} &= (a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_m)^T, && i < j,\\
S_I^\lambda &= (a_{k\ell})_{1\le k,\ell\le m} \text{ mit } a_{ii} = \lambda \text{ und } a_{kk} = 1 \text{ für } k \neq i, \text{ sonst } a_{*,*} = 0, && i \in \{1, \dots, m\}\\
S_{II}^\lambda &= (a_{k\ell})_{1\le k,\ell\le m} \text{ mit } a_{kk} = 1 \text{ und } a_{ij} = \lambda, \text{ sonst } a_{*,*} = 0, && i \neq j
\end{aligned}$$

mit $\lambda \in \mathbb{K}$. Weiter sei für $j > i$

$$S_{III,i,j} = (s_{k\ell})_{k,\ell} \quad \text{mit} \quad s_{k\ell} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k = \ell \text{ mit } k, \ell \neq i, j,\\ & \text{oder wenn } (k, \ell) \in \{(i, j), (j, i)\}\\ 0, & \text{andernfalls}\end{cases}$$

Zeigen Sie

$$A_I = S_I^\lambda A, \qquad A_{II} = S_{II}^\lambda A, \qquad A_{III} = S_{III} A,$$
$$(S_I^\lambda)^{-1} = S_I^{\frac{1}{\lambda}}, \qquad (S_{II}^\lambda)^{-1} = S_{II}^{-\lambda}, \qquad (S_{III})^{-1} = S_{III}.$$

Hinweis: S_I^λ, S_{II}^λ, S_{III} hängen auch von i und j ab. Daher schreibt man manchmal auch $S_{I,i}^\lambda$, $S_{II,i,j}^\lambda$, $S_{III,i,j}$. Selbiges gilt auch für A_I^λ, A_{II}^λ und A_{III}.

Aufgabe G2

(a) Zeigen Sie $(AB)^T = B^T A^T$ für $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m,l}(\mathbb{K})$.

(b) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie S-Rang(A), Z-Rang(A), Rang(A) und bestimmen Sie eine Basis von Bild(A). Wie könnte man eine ONB von Bild(A) bestimmen?

Aufgabe G3

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 13 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Matrix B mit Zeilenstufenform und $A \underset{EZU}{\sim} B$ mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Geben Sie eine Matrix R mit $B = RA$ an. Interpretieren Sie R als Transformationsmatrix.

Hausübung

Aufgabe H1 (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ und $A^{-T} := (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ für invertierbare Matrizen $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.

(b) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie S-Rang(A), Z-Rang(A), Rang(A) und bestimmen Sie eine ONB von Bild(A).

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Seien $A = (a_1, \dots, a_n) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ mit $a_k \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $k = 1, \dots, n$, und

$$\begin{aligned} \tilde{A}_I^\lambda &= (a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i, a_{i+1}, \dots, a_n), && i \in \{1, \dots, n\} \\ \tilde{A}_{II}^\lambda &= (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \lambda a_j, a_{i+1}, \dots, a_n), && i, j \in \{1, \dots, n\} \\ \tilde{A}_{III} &= (a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n), && i < j \end{aligned}$$

mit $\lambda \in \mathbb{K}$. Bestimmen Sie Matrizen $\tilde{S}_I^\lambda$, $\tilde{S}_{II}^\lambda$ und $\tilde{S}_{III}$ mit

$$\tilde{A}_I = A\tilde{S}_I^\lambda, \qquad \tilde{A}_{II} = A\tilde{S}_{II}^\lambda, \qquad \tilde{A}_{III} = A\tilde{S}_{III},$$

und berechnen Sie $(\tilde{S}_I^\lambda)^{-1}$, $(\tilde{S}_{II}^\lambda)^{-1}$, $(\tilde{S}_{III})^{-1}$.

Hinweis: Die Aufgabe lässt sich durch Rechnen oder mit Hilfe von Aufgabe G2/H1 lösen. $\tilde{S}_I^\lambda$, $\tilde{S}_{II}^\lambda$, $\tilde{S}_{III}$ hängen auch von i und j ab. Daher schreibt man manchmal auch $\tilde{S}_{I,i}^\lambda$, $\tilde{S}_{II,i,j}^\lambda$, $\tilde{S}_{III,i,j}$.

Aufgabe H3 (2+2 (+1) Punkte)

Sei $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ und

$$A := M_T^{E_4,E_3} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei E_3, E_4 die Standardbasen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ bezeichnen.

(a) Überführen Sie A in eine Matrix $B \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \end{pmatrix}$$

mit $a_{ii} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, so dass $A \underset{EU}{\sim} B$.

(b) Bestimmen Sie zudem Z-Rang(A), S-Rang(A) und Rang(A), sowie Transformationsmatrizen S^{-1} und R mit $RAS^{-1} = B$.

($\star$) Bestimmen Sie Basen B_1, B_2 mit $B = M_T^{B_1,B_2}$.

Aufgabe H4 ($\star$) (1+1+2 Punkte)

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{K}^n$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne das zugehörige Standardskalarprodukt. Weiter sei $T \in \mathscr{L}(V)$ mit $A := M_T^{E_n}$.
Notation: Zu einem Vektor $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ werden die Koordinaten stets mit $\vec{x}$ bezeichnet. Gleiches gilt für Vektoren $l \in V^*$ bzgl. der dualen Basis E_n' von E_n.

(a) Zeigen Sie

$$\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^* \vec{y} \rangle, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n.$$

(b) Zeigen Sie, dass für $l = \sum_{j=1}^n l_j e_j' \in V^*$

$$l(x) = \langle \vec{x}, \bar{\vec{l}} \rangle, \quad x = \sum_{j=1}^n x_j e_j,$$

gilt. Folgern Sie hieraus, dass die Abbildung

$$I : \begin{cases} V^* & \to & \mathbb{K}^n \\ l & \mapsto & \bar{\vec{l}} \end{cases}$$

bijektiv ist (vgl Abs. 3.11) und linear falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass

$$l(Tx) = \langle A\vec{x}, \bar{\vec{l}} \rangle = \langle \vec{x}, A^* \bar{\vec{l}} \rangle, \quad x = \sum_{j=1}^n x_j e_j,\ l = \sum_{j=1}^n l_j e_j'$$

gilt. Folgern Sie hieraus, dass $T' = I^{-1} A^* I$ ist. Man kann also in Vektorräumen mit Hilfe des SP die Matrix A^* als Adjungierte interpretieren. Aus diesem Grund nennt man A^* auch häufig *Hilbertraum-adjungierte*.