Anmerkungen zu Lösungen der ersten Klausur

Aufgabe 2

Durch $(a-1)$ (respektive $(a-2)$) für *beliebiges* $a \in \mathbb{R}$ zu teilen ist nur sinnvoll, wenn vorher der Fall $a=1$ (respektive $a=2$) gesondert behandelt wurde.

Aufgabe 3

Die Aufgabe war es, eine Gesamtmatrix für die *nacheinander* auszuführenden Operationen anzugeben:

- erst an der $x+y=0$ Ebene spiegeln,
- dann auf die $z=0$ Ebene projizieren und
- abschließend an der x–Achse um $\alpha = 45°$ drehen

Herangehensweise: Eine mögliche Herleitung der Einzelmatrizen ist es, sich den Effekt (bspw. Spiegelung an einer Ebene) durch Anwendung der Matrix A_1 auf die Vektoren der Standardbasis des (hier) $\mathbb{R}^3$ klarzumachen. Die daraus erhaltenen Vektoren bilden dann die Spalten der gesuchten Matrix A_1. Im Falle der Spiegelung wäre das (ggf. im zweidimensionalen klarmachen, warum das so ist):

$$A_1 e_1 = -e_2, \quad A_1 e_2 = -e_1, \quad A_1 e_3 = e_3$$

Desweiteren: Sind A_1, A_2 und A_3 drei nacheinander auszuführende Drehungen/Spiegelungen/…, dann sind diese in der Reihenfolge

$$A = A_3 \cdot A_2 \cdot A_1$$

auszuführen, denn

$$Ax = A_3 \left(A_2 \left(A_1 x \right) \right)$$

und Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen *nicht* kommutativ.

Aufgabe 4

Sarrus ist nicht immer die beste/einfachste Möglichkeit die Determinante auszurechnen. Laplace angewandt auf eine Zeile/Spalte, die bis auf einen Eintrag Null ist, liefert hier beinahe direkt die Faktorisierung der Determinante. Konkret an der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

aus der Klausur hieße das:

- Sarrus:

  $\mathrm{Det}(A-\lambda I_3) = (5-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(7-\lambda)+2\cdot 8\cdot 0+0\cdot 0\cdot(-1)-0\cdot(1-\lambda)\cdot 0-(5-\lambda)\cdot 8\cdot(-1)-0\cdot 2\cdot(7-\lambda)$

  In diesem konkreten Fall war aber selbst bei Anwendung von Sarrus zu erkennen (konzentrierte und korrekte Multiplikation der Matrixeinträge vorausgesetzt), dass $5-\lambda$ ausgeklammert werden kann und damit ein quadratisches Polynom verbleibt, für welche die Nullstellen einfach zu berechnen sind.

- Laplace nach erster Spalte entwickelt:

  $$\mathrm{Det}(A-\lambda I_3) = (5-\lambda)([1-\lambda]\cdot[7-\lambda]+8)$$

Aufgabe 5

Die Aufgabe: Der $\mathbb{R}$–Vektorraum $V := M_{n\times n}(\mathbb{R})$ wurde mit der Abbildung

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(AB^{\mathrm{T}})$$

versehen, für die die Skalarprodukteigenschaften nachzurechnen waren. *Kein Beweis* ist es hier schlicht

$$\mathrm{Spur}((\lambda A+\mu B)C^{\mathrm{T}}) = \lambda\mathrm{Spur}(AC^{\mathrm{T}}) + \mu\mathrm{Spur}(BC^{\mathrm{T}})$$

zu schreiben — denn das war die zu zeigende Aussage, nicht mehr. Vielmehr muss hier etwas folgender Art stehen:

$$\begin{aligned}\mathrm{Spur}((\lambda A+\mu B)C^{\mathrm{T}}) &= \sum_{i=j}\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_{ik}c_{jk}+\mu b_{ik}c_{jk}) = \sum_{i=j}\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_{ik}c_{jk}) + \sum_{i=j}\sum_{k=1}^{n}(\mu b_{ik}c_{jk})\\ &= \lambda\mathrm{Spur}(AC^{\mathrm{T}}) + \mu\mathrm{Spur}(BC^{\mathrm{T}})\end{aligned}$$

Wichtig: Matrixmultiplikation ist *nicht komponentenweise*:

$$\mathrm{Spur}(A\cdot B^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Spur}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk}\right)_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ik} \neq \sum_{i=1}^{n} a_{ii}b_{ii}.$$

Insbesondere ist $\mathrm{Spur}(A\cdot A^{\mathrm{T}}) \neq \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2$, sondern $\mathrm{Spur}(A\cdot A^{\mathrm{T}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$.

Jede Basis $\mathcal{B}$ des Vektorraum $V_n := M_{n\times n}(\mathbb{R})$ besteht aus $n\cdot n$–vielen $n\times n$–Matrizen. Die kanonische Basis des V_2 ist beispielsweise

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

Für die Norm gilt $\|A\|^2 = \langle A, A\rangle$.

Aufgabe 6

λ ist ein Eigenwert einer quadratischen (stochastischen) Matrix P genau dann, wenn es einen von Null verschiedenen Vektor $v \neq \vec{0}$ gibt, so dass

$$Av = \lambda v.$$

Hinschreiben der Koeffizienten von Av und von λv liefert, zusammen mit den Eigenschaften von P, dann einen ganz guten Kandidaten für v.

Alternativ: λ ist Eigenwert genau dann, wenn $\mathrm{Det}(A - \lambda I_n) = 0$. Wie sehen die Einträge von $A - \lambda I_n$ aus? Wie lässt sich eine Spalte zu Null kombinieren — und was würde daraus für die Determinante folgen?