## Zu Aufgabe G4

1. Allgemein ist $b_i^*$ ein Element der Dualbasis $\mathcal{L}^*$, wenn für alle $b_j \in \mathcal{L}$ gilt, dass $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$. Bezüglich der Standardbasis $\mathcal{L} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ist die Dualbasis $\mathcal{L}^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ also gegeben als die Menge der Abbildungen

$$e_i^* : V \to \mathbb{K}, \quad e_i^*((v_1, \ldots, v_n)) \mapsto v_i.$$

Das ergibt sich durch Nachrechnen, wie $e_i^*$ einen bel. Vektor $v = (v_1, \ldots, v_n)^T \in V$ abbildet:

$$e_i^*(v) = e_i^*\left(\sum_{j=1}^n v_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n v_j e_i^*(e_j) = v_i$$

2. Da $\mathcal{L}^*$ eine Basis von $V^*$ darstellt, können wir $L_v$ als Linearkombination

$$L_v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{K}$ schreiben. Was wir nun bestimmen müssen sind die Skalare $\lambda_i$. Wir schreiben also hin, was wir schon wissen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i = \langle v \mid w\rangle = L_v(w) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(w) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*\left(\sum_{j=1}^n w_j e_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \cdot w_j \cdot e_i^*(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot w_i\end{aligned}$$

Da die Wahl der $\lambda_i$ nur von $L_v$ und $\mathcal{L}^*$, nicht aber vom konkreten $w \in V$ abhängen darf, folgt $\lambda_i = v_i$.

## Zu Aufgabe H5

*Wohldefiniertheit* setzt sich zumeist aus zwei Teilen zusammen, der *Existenz* und der *Eindeutigkeit*. Wir wollen stets überprüfen, ob es sich bei der angegebenen Zuordnung um eine *Funktion* handelt.

- Beispiel 1: Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) := x^2$. Ist $f$ eindeutig? Ja, per Konstruktion: Jedes $x \in \mathbb{R}$ wird auf *genau ein* (Achtung: Das ist *nicht* Injektivität!) $y = x^2 \in \mathbb{R}$ abgebildet. Existiert $f$ überdies? Ja, eben weil $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.
- Beispiel 2: Betrachten wir die Zuordnung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto \sqrt{z}.$$

Ist $f$ eindeutig? Nein, denn keinem $z \in (-\infty, 0)$ wird eine *reelle* Zahl zugeordnet; eingeschränkt auf den Definitionsbereich $[0, \infty)$ wäre $f$ allerdings eindeutig. Kann ein solches $f$ mit dieser Abbildungseigenschaft existieren? Nein, denn $\sqrt{z} \notin \mathbb{R}$ für $z < 0$!

Beachte: In obigen beiden Beispielen fielen *Eindeutigkeit* (jedem Element des Definitionsbereiches wird *genau ein* Element im Bild zugeordnet) und *Existenz* (es handelt sich bei der Zuordnung um eine *Funktion*) zusammen. Hätten wir überprüfen wollen, ob $f$ und $g$ *lineare Abbildungen* sind, so hätten wir bei der Existenz zudem die *Linearität* nachweisen müssen.

- Wikipedia. :)
  `http://de.wikipedia.org/wiki/Wohldefiniertheit#Einfaches_Beispiel`