Wir wollen zeigen, dass $A_I^\lambda = S_I^\lambda A$ gilt, wobei $A = (a_{k,\ell})_{k\ell}$ eine Matrix mit Koeffizienten $a_{k,\ell} \in \mathbb{R}$ sei, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq \ell \leq n$. Wähle nun eine beliebige, aber feste Zeile $i \in \{1, \ldots, m\}$. Wie in der Einleitung zu Aufgabe G1 sei $S_{I,i}^\lambda = (s_{j,k})_{jk}$, $1 \leq j \leq m$ von der Form

$$s_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } j = k, \text{ aber } j, k \neq i \\ \lambda, & \text{wenn } j, k = i \\ 0, & \text{wenn } j \neq k \end{cases}$$

Will heißen: $S_{I,i}^\lambda$ sieht aus wie die Einheitsmatrix, allerdings ist im Eintrag s_{ii} ein λ statt einer 1. Wir berechnen nun die Einträge $\tilde{a}_{k,\ell}$ der Matrix $A_{I,i}^\lambda$:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{k\ell} &= \sum_{j=1}^{m} s_{k,j} a_{j,\ell} \qquad \text{(normale Matrixmultiplikation: } k\text{-te Zeile aus } S_I^\lambda \times \ell\text{-te Spalte aus } A) \\ &= \begin{cases} 0 \cdot a_{1,\ell} + \cdots + 0 \cdot a_{k-1,\ell} + \underbrace{\mathbf{1} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k},\ell}}_{j=k} + 0 \cdot a_{k+1,\ell} + \cdots + 0 \cdot a_{m,\ell}, & \text{wenn } k \neq i \\ 0 \cdot a_{1,\ell} + \cdots + 0 \cdot a_{k-1,\ell} + \underbrace{\lambda \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k},\ell}}_{j=k} + 0 \cdot a_{k+1,\ell} + \cdots + 0 \cdot a_{m,\ell}, & \text{wenn } k = i \end{cases} \end{aligned}$$

Folglich gilt für den i-ten Zeilenvektor von $A_{I,i}^\lambda$:

$$(\tilde{a}_{i,1}, \ldots, \tilde{a}_{i,n}) = \lambda \cdot (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}),$$

was nachzurechnen war. Ganz analog zeigen sich die anderen Behauptungen.

Ähnlich könnt ihr in Aufgabe G2.a) argumentieren: Seien $A = (a_{i,j})_{ij} \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ und $B = (b_{jk})_{j,k} \in M_{m \times l}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$AB = (c_{i,k})_{i=1,\ldots,n,\, k=1,\ldots,l} \text{ mit } c_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k}$$

$$(AB)^T = (\tilde{c}_{k,i})_{k=1,\ldots,l,\, i=1,\ldots,n} \text{ mit } \tilde{c}_{k,i} = c_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k}$$

$$B^T A^T = (\tilde{d}_{k,i})_{k=1,\ldots,l,\, i=1,\ldots,n} \text{ mit } d_{k,i} = (k\text{-te } \textbf{Spalte} \text{ aus } B \times i\text{-te } \textbf{Zeile} \text{ aus } A) = \sum_{j=1}^{m} b_{j,k} a_{i,j}$$

d.h. $(AB)^T = B^T A^T$. Die Vertauschung $a_{i,j} b_{j,k} \rightsquigarrow b_{j,k} a_{i,j}$ ist wegen der Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{R}$ korrekt.