Wozu reine Mathematik?

Mathematisierung der Wissenschaften im historischen Wandel

Ausarbeitung Seminar “Wissenschaftstheorie” am 9. April 2012 von Jonathan Weinberger

Zusammenfassung

Das 20. Jahrhundert bedeutet für die Mathematik eine Neuorientierung. Sie entwickelt erstmals Ansätze für solide axiomatische Grundlagen. Damit einher gehen methodischen Veränderungen, welche die heute geläufige Unterteilung in “reine” und “angewandte” Mathematik zur Folge haben. Was bedeutet dies für das Verständnis, die Wahrnehmung und Förderung der Mathematik als Wissenschaft?
In der Physik und den Ingenieurswissenschaften sind noch heute Theorien und Berechnungen üblich, die mit mathematisch nicht gültig definierten Größen arbeiten und dennoch korrekte Ergebnisse liefern. Wozu also rigorose Formalisierung? Selbst viele reine Mathematiker bleiben in ihrem Forschungsalltag weitgehend unbeeinflusst von Resultaten aus Logik und Mengenlehre. Wozu also axiomatische Grundlagenforschung?

1 Einleitung – Zwei gegenläufige Thesen?

> *There is no branch of mathematics, however abstract, which may not someday be applied to the phenomena of the real world.*

Nikolaj Lobachevskij (1792 - 1856)

> *God does not care about our mathematical difficulties – He integrates empirically.*

Albert Einstein (1879 - 1955)

Beide Zitate scheinen gegenläufige Thesen zu vertreten. Auf den ersten Blick lässt sich Lobachevskijs Zitat als Verteidigung der reinen Mathematik gegen Einsteins Entkräftung ihrer Wichtigkeit verstehen. Doch selbst mit der Prämisse, dass Lobachevskijs Worte wahr sind, stellt sich heraus, dass sie nicht notwendigerweise als eine Fürsprache oder Apologie der reinen Mathematik dienen. Die Suche nach dem Stichwort “Algebra” in der Publikationsliste des Wiener Erwin-Schrödinger-Instituts für mathematische Physik liefert rund 190 Treffer aus etwa 2350 Titeln, was etwa 8.1 Prozent entspricht. Für das Beispiel dieser Stichprobe scheint Lobachevskij also im Recht, dass jedes mathematische Gebiet, wie abstrakt es auch sein möge, relevant für die Erforschung der Natur sein kann – aber eben nur *kann.* Obwohl es zunächst so scheinen mag, impliziert seine Aussage also nicht, dass immer höherer mathematischer Abstraktionsgrad in physikalischer Forschung auch notwendig ist.

Doch wozu *ist* reine Mathematik vonnöten, wenn nicht in der Physik, mit der sie stets in vermeintlicher Symbiose gestanden hat?

2 Was ist reine Mathematik?

Die Unterscheidung zwischen reiner und angewandter Mathematik nach unserem Verständnis ist vergleichsweise jung. Zwar spricht Platon in “Der Staat” einerseits von der “Logistik” (Rechnen) mit militärischem Nutzen und andererseits von der “Arithmetik” (Zahlentheorie), die von philosophischem Interesse sei. Doch selbst zu Lebzeiten von Gauß (Mitte 18. bis Mitte 19. Jahrhundert) ist noch keine scharfe, umfassende Trennung von reiner und angewandter Mathematik geläufig.

In der vorliegenden Diskussion nehmen wir Methode und Zweck als Unterscheidungsgrundlage zwischen reiner und angewandter Mathematik.

Reine Mathematik muss axiomatisch begründet werden und ist strukturalistisch orientiert. Das bedeutet, oft geht es in erster Linie darum, Eigenschaften einer Struktur oder bestimmter Spezialfälle einer Struktur festzutellen. Darüberhinaus werden bestehende Definitionen hinterfragt und in (möglicherweise verschiedene Richtungen) verallgemeinert, um bekannte, zunächst unterschiedliche Konzepte als Instanz derselben Struktur festzustellen. Gelingt diese “genetische” Verallgemeinerung nicht, so bemüht man sich wenigstens um die sprachliche Parallelisierung von Theorien: analoge Begriffe aus unterschiedlichen Kontexten bekommen gleiche Namen.

Die Anwendung der reinen Mathematik ist in erster Linie intrinsisch. Sie wird “um ihrer selbst Willen” betrieben. Das bedeutet nicht, dass unterschiedliche Gebiete sich nicht auch gegenseitig Anwendungen zu bieten hätten, oder dass reine Mathematik überhaupt nichts mit der physikalischen Welt zu tun hätte. Aber es muss nichts von beidem erfüllt sein. Beispielhaft können Algebra, Logik und Differentialgeometrie als Gebiete der reinen Mathematik genannt werden.

Auch angewandte Mathematik braucht ein stabiles Fundament, wird aber oft von Heuristik motiviert und der Technik bestimmt. Zwar beweist man bei der Entwicklung eines Algorithmus seine Korrektheit und berechnet die theoretische Komplexität, aber oft spielen reale Laufzeiten auf physikalischen Systemen bei bestimmter Eingabe von Datensätzen eine Rolle. Rechen- und Wirtschaftspraxis geben also einerseits einen Teil der Entwicklung vor. Andererseits sind sie oft auch Hauptmotivation für die Problemstellung. Angewandte Mathematik hat also eine starke extrinsische Tendenz. Probleme sollen gelöst werden, anstatt dass Eigenschaften von Strukturen um ihrer selbst Willen aufgelistet werden.[1] Repräsentative Gebiete der angewandten Mathematik sind etwa Numerik, Statistik oder Optimierung.

Als neue “dritte Säule” gilt mittlerweile die experimentelle Mathematik (auf Englisch auch *computational mathematics*). Hierbei werden mithilfe des Computers Probleme simuliert. Dies hat Anwendungen in der angewandten Mathematik, beispielsweise, wenn es um numerische Verfahren geht. Aber auch die reine Mathematik stützt sich in Teilen darauf. Solche Simulationen liefern etwa in der Gitter- oder Gruppentheorie bedeutende Resultate, auch, wenn die Hintergründe noch nicht erfasst sind. Auf diese Art können also anhand experimenteller Daten auch Theorien der reinen Mathematik ausgebaut werden.

3 Wie entstand reine Mathematik? – Zwei Fallbeispiele

Im folgenden betrachten wir zwei Beispiele, die für die Geschichte der reinen Mathematik von großer Bedeutung sind: die Entwicklung der Analysis durch Leibniz und Newton zwischen dem 17. und 18. Jahrhundert sowie die sogenannte Grundlagenkrise der Mathematik zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Der Abschnitt über die Grundlagenkrise entstammt in gekürzter Form [8].

[1] Auch in der reinen Mathematik gibt es berühmte, scheinbar isolierte Einzelprobleme. Diese werden aber häufig durch das Bauen einer Theorie drum herum gelöst, etwa Fermats letzter Satz durch A. Wiles, 1994.

3.1 Die Entwicklung der Analysis durch Leibniz und Newton

Newton entwickelt sein Interesse an Mathematik mit 21 Jahren, im Jahr 1664. Später wird er Naturwissenschaftler und Philosoph. Seine mathematischen Ideen sind durch Viète und Descartes beeinflusst. Descartes untersucht 1637 zu einer gegebenen Kurve in der Ebene je eine Funktion, sodass die Punkte der Kurve gerade deren Nullstellen bilden. Newton schließlich approximiert Kurven durch Potenzreihen. Er untersucht diese Reihen zwar auf Konvergenz, doch nur in einem sehr groben Sinne, da eine rigorose Definition des Konvergenzbegriffs überhaupt fehlt. Im Jahr 1666 erkennt Newton, dass Differentiation und Integration zueinander inverse Operationen sind. Damit ist der Hauptsatz der Analysis gefunden, ohne dass Differentiation und Integration zu diesem Zeitpunkt rigoros eingeführt sind. Er deutet den Hauptsatz in seinem Sinne geometrisch und berechnet etwa die Länge von Kurvenabschnitten. Für Newton war stets die Anwendung in Physik und Mechanik entscheidend: sein physikalisches Hauptwerk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* erscheint 1687, davon unabhängige mathematische Schriften werden erst 1704 und 1707 in Bänden veröffentlicht (*Arithmetica Universalis* und Anhänge *Opticks*). Auch Newtons Wissenschaftssprache ist von seiner physikalischer Motivation geprägt: Funktionen, Ableitungen und infinitesimale Größen nennt er "Fluenten", "Fluxionen" und "Momente" (Flux: lat. Fluss). Für die "Fluxion" einer "Fluente" x führt er den heute noch in der Physik gebräulichen Operator $\dot{x}$ ein.

Leibniz studiert Philosophie, Jura und Mathematik. Er entwickelt seine Version der Analysis etwa zeitgleich zu Newton. Auch Leibniz interessiert sich für unendliche Reihen, insbesondere für Darstellungen mittels Teleskopsummen. Für Leibniz ist der Begriff der Infinitesimalen entscheidend. Er führt die Symbole $\mathrm{d}x$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ und $\int$ ein. Obwohl der heute als bestimmter Grenzwert geläufige Differentialquotient noch nicht definiert ist, suggeriert Leibniz' Schreibweise wirklich einen "Quotienten zweier Differentiale". So ergibt sich auch die Kettenregel durch natürliche Manipulation der Symbole des Kalküls:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$

Leibniz ist sich der Definitionslücken des Formalismus bewusst und gibt an, dass zusätzliche aufwändige Rechnungen seinen Formalismus auf eine Grundlage stellen könnten, die der griechischen Tradition axiomatischer Mathematik genügten.

Führen Newton und Leibniz in den 1670er Jahren noch wissenschaftliche Briefwechsel, so bricht zu Beginn des nächsten Jahrhunderts ein Streit zwischen ihnen aus. Anhänger von Newtons Schule werfen Leibniz Plagiarismus von Newtons mathematischen Ideen vor. Leibniz bittet die Royal Society um Klärung, doch diese wendet sich gegen Leibniz, zumal Newton selbst ein einflussreiches Mitglied ist. Als Folge gewinnt die Newtonsche Schule weiter an Popularität in England. Viele folgen ihrer statt Leibniz' Lehre und schließen sich von den Entwicklungen der kontinentalen Mathematiker aus. Aber es ist gerade dieser Strom von Anhängern der Leibnizschen Analysis, welche den weiteren Frotschritt prägt.

Im 19. Jahrhundert stellen dann Cauchy und Weierstraß die Analysis auf eine rigorose Grundlage. Ausgehend von Folgen wird Konvergenz exakt definiert und darauf gründend Grenzwerte, Ableitungen und Integrale.

3.2 Der Logizismus und die Grundlagenkrise

Den Logizismus vertreten Frege, Russell, Whitehead und Carnap. Frege betont die Relevanz einer logisch-formalen Begründung der bereits gefunden arithmetischen Erkenntnisse. So ist laut dem Titel des ersten Paragraphen seiner *Grundlagen der Arithmetik* (1884) „...in neuerer Zeit ein auf die Strenge der Beweise und scharfe Fassung der Begriffe gerichtetes Bestreben erkennbar“. Eine „blos moralische Überzeugung“ genüge nicht mehr, angefangen von den Begriffen der „Function, der Stetigkeit, der Grenze, des Unendlichen“, der „höheren Analysis“[2] also, bis hin zur Begründung

[2]Frege spricht vom aktuellen Standpunkt aus grundlegende Begriffe der Analysis an. Die höhere Analysis im heutigen Sinne wird erst im Laufe des 20. Jahrhunderts entwickelt. Dazu zählen beispielsweise die Maßtheorie,

der vermeintlich gewohnten Zahlensysteme. Beispielhaft sind das „Negative und die Irrationalzahl“ aufgeführt. Frege kritisiert zuvor in der Einleitung die „psychologistischen“ Strömungen des 19. Jahrhunderts. Diese betonten die subjektive Vorstellung mathematischer Objekte bis hin zu einer Grundlegung der Arithmetik durch „Muskelgefühle“. Man dürfe das „Gedachtwerden eines Satzes nicht mit seiner Wahrheit“ verwechseln. Innere Bilder, insbesondere von Zahlen, hätten durchaus ihre Berechtigung, jedoch seien sie „dem Mathematiker als solchem“ gleichgültig. Freges Einleitung gegen den „Subjektivismus und Relativismus“ hat einen rhetorischen Höhepunkt in der Polemik, es fehle „nur noch, dem Wohlgeschmacke des Kuchens eine besondere Bedeutung für den Zahlbegriff zuzuschreiben“. Nach dieser Retrospektive in der Einleitung und der Feststellung im ersten Paragraphen, dieses Denken habe sich geändert, heißt es nun im zweiten Paragraphen, mathematische Beweise sollten „auf den Begriff der Anzahl und auf die von positiven Zahlen geltenden einfachen Sätze führen, welche die Grundlage der Arithmetik bilden“.

Das logizistische Programm führt die elementare Arithmetik als Grundlage jeglicher höheren Mathematik definitorisch auf eine kleine Anzahl von Axiomen zurück. Mathematische Sätze sind stets logische Sätze und müssen sich innerhalb dieser Logik beweisen lassen. Die Axiome selbst sollen logisch einsichtig und apriorisch sein, aber „eines Beweises weder fähig noch bedürftig“. Frege führt in seiner *Begriffsschrift* (1879) eine Syntax formaler Sprachen ein, die heute nur leicht abgewandelt gebräuchlich ist. Nach seinen philosophischen und weiteren logischen Betrachtungen in den *Grundlagen* präzisiert er sein Programm als *Grundgesetze der Arithmetik* (1893 und 1903) in zwei Bänden. Russell und Whitehead folgen dem gleichen Ziel. Auf den fast 700 Seiten der *Principia Mathematica* (1910) findet sich eine rein logische Herleitung einer Mengenlehre, welche auch Arithmetik mit *Kardinal-* und *Ordinalzahlen* beinhaltet und die Menge der reellen Zahlen beschreibt. Eine Kardinalzahl gibt die *Mächtigkeit einer Menge* an, also die Anzahl ihrer Elemente. Wichtig ist dies insbesondere für unendliche Mengen. Die Ordinalzahlen sind eine Abstraktion der alltäglichen Ordungszahlen auf unendliche Mengen mit allgemeinen Ordnungsrelationen. Im Falle einer geordneten Menge geben sie also die jeweiligen Positionen der Elemente an. Dieser Terminus findet sich zwar beispielsweise in der heute üblichen *Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom* (*ZFC*[3]) wieder, doch benutzt Russell in den *Principia Mathematica* ein anderes Axiomensystem, nämlich seine eigene sogenannte *Typentheorie*. Es scheint, dass man die Arithmetik im logizistischen Sinne rigoros beschreiben kann. So wird der Satz „$1 + 1 = 2$“ nichttrivial als Resultat einer logischen Proposition auf Seite 379 der *Principia Mathematica* gezeigt. Vor allen Dingen aber soll die Typentheorie Paradoxa wie die *Russellsche Antinomie* lösen.

Diese ist der Beginn der *Grundlagenkrise*. Um 1900 entdeckt Russell, dass Freges Axiomensystem einen Widerspruch aufweist: die Existenz der Menge aller Mengen mit einer gewissen Eigenschaft. Demnach müsste auch die Menge $M := \{A : A \notin A\}$ aller Mengen A existieren, die sich nicht selbst enthalten. Dies hätte aber den Widerspruch $A \in M \iff A \notin M$ zufolge. Es wäre A genau dann in M, wenn A nicht in M wäre. Beispielsweise kann dieser Widerspruch durch die Einführung verallgemeinerter Mengen, der *Klassen*, gelöst werden. In einer solchen Theorie existert M als *echte Klasse*, somit nicht als Menge. Auch Ernst Zermelo und Adolf Abraham Halevi Fraenkel berücksichtigen dies bei der Begründung der ZFC. Zermelo ergänzt sie im Jahre 1930 um das *Fundierungsaxiom*[4] und damit die notwendige Existenz *minimaler Elemente*. Als direkte Konsequenz ist keine Menge Element von sich selbst. Da die ZFC-Mengenlehre Klassen nicht kennt, verbietet sie die generelle Existenz von M.

Fundierungsaxiom. *In jeder nichtleeren Menge A gibt es ein Element a, das mit A disjunkt ist. Ein solches a heißt minimales Element.*

Funktionalanalysis und moderne Differentialgeometrie.

[3] Das C steht für „Axiom of Choice“. Sei dazu A eine Menge nichtleerer Mengen. Vermöge des Auswahlaxioms existiert eine *Auswahlfunktion* f, derart, dass für alle $X \in A$ gilt $f(X) \in X$. Anschaulich gesprochen wählt f zu jedem X in A genau ein Element aus.

[4] Vgl. [7], S. 169 f.

Satz. *Für jede Menge A gilt $A \notin A$.*

Beweis. Für jedes A existiert die Menge $A' := \{A\}$. Wegen des Fundierungsaxioms besitzt A' ein minimales Element. Dieses kann nur A sein. Es gilt also $A \cap A' = \emptyset$ und damit $A \notin A$. □

Das erste Kapitel des Haupttextes in der *Principia Mathematica* beginnt mit Russells „Theory of Deduction“ [5]. Von der „Theorie der Deduktion“ ist auch in seiner *Einführung in die mathematische Philosophie* (1919) die Rede. Einleitend[6] betont er, „kein Appell an den gesunden Menschenverstand oder an die 'Anschauung', sondern nur strenge deduktive Logik soll in der Mathematik vorkommen, nachdem einmal die Prämissen aufgestellt worden sind.“ Die *Prämissen* definiert Russell als „in der Deduktion“ existente Sätze, „aus denen wir einen Satz ableiten.“ Diesen nennt er *Schluss*. Folgerichtig kritisiert Russell seinerseits Kant. Was zu dessen Zeiten in der Mathematik nicht „*bewiesen* werden konnte, das *kannte* man nicht - z.B. das Parallelenaxiom.“ Die „innere Anschauung“ dementiert Russell, denn einerseits könne in der Mathematik nur das erkannt werden, was logisch ableitbar sei und andererseits müssten außermathematische Kenntnisse rein empirisch erworben sein, also niemals a priori. Hier verweist er auf die *Principia Mathematica* und die *Principles of Mathematics* (1903).

4 Was nützt reine Mathematik?

Wie im obigen Abschnitt illustriert, entwickelte sich die Analysis über mehrere Jahrhunderte hinweg ohne Axiomatische Grundlage. Dennoch kamen Newton und Leibniz zu korrekten Ergebnissen. War die Einführung von Weierstraß' “Epsilontik” also wirklich vonnöten? Ja, und scheinbar “paradoxe Rechenergebnisse” mit unendlichen Reihen zeigen, dass sogar noch weiter zwischen absoluter und nicht-absoluter Konvergenz unterschieden werden muss. Die Unterscheidung von Konvergenzbegriffen wird noch reichhaltiger, wenn man Funktionenfolgen oder -reihen betrachtet. Hätte man im Laufe der Entwicklung Reihen nur als Mittel zur Approximation mit konkretem Rechenergebnis als Ziel genutzt, ohne je auf Konvergenztheorie zu achten, so hätte sich keine sinnvolle Theorie entwickeln können. Da sich etwa für Newton unendliche Reihen aus geometrischen Problemen der Mechanik ergeben haben und Newton heuristisch mit ihnen operierte, kann der Weg bis zur Weierstraßschen Axiomatisierung der Analysis als Weg der unendlichen Reihen vom Gegenstand der angewandten Mathematik zur eigenen Theorie in der reinen Mathematik verstanden werden.

Oft wird heute Lehrstoff in einer Manier präsentiert, die Newtons und Leibniz' zeitgenössischem intuitiven Umgang mit infinitesimalen Größen entspricht. So werden Grenzwerte von Funktionen in den gymnasialen Oberstufen als anschaulicher Näherungsprozess erklärt, ohne, dass man überhaupt den Begriff der Folge zur Verfügung hat. Physikstudenten lösen im ersten Semester Differentialgleichungen, integrieren im Mehrdimensionalen und über Distributionen – wobei ihnen gleichzeitig dasselbe Grundlagenwissen fehlt, wie schon in der Oberstufe. Dennoch kommt man stets zu richtigen Rechenergebnissen. Natürlich gibt es gute pädagogische Gründe, Wissen nach dieser Methode zu vermitteln. Und das System funktioniert – aber nur solange ein Dozent oder Lehrer darauf achtet, dass keine unmittelbare Abhängigkeit zu dem fehlden Grundlagenwissen aufkommt. Es werden nur Aufgaben werden gestellt, die nach dem gelernten Schema funktionieren und in denen keine unbekannten “Singularitäten” auftreten.

Aber dieser pädagogische Sandkasten fehlt dem Wissenschaftler völlig. Seit Euklids “Elementen” zeichnet sich die Mathematik durch ihren genetisch-axiomatischen Aufbau aus. Zwar hat Intuition und Anschauung die Mathematik in jeder Hinsicht maßgeblich geprägt, wie unsere Betrachtung über die Entwicklung der Analysis nahelegt. Aber bald bündelten sich die Tendenzen hin zum Er-gründen des scheinbar Bekannten und seinem erneuten, rigorosen Be-gründen.

[5] [**?**], S. 94
[6] [6], S. 161

Den Logizisten reichte es nicht mehr, naiv selbst mit "einfachen Objekten" wie "Zahlen" oder "Mengen" zu operieren. Weil sie erkannten, dass diese Objekte ohne strenge Definition keinen operationalen und daher keinen mathematischen Wert haben. Das prominenteste Beispiel ist die Russellsche Antinomie. Gödel lieferte mit seinen Unvollständigkeitssätzen noch zusätzliche, weitreichende innermathematische und auch erkenntnistheoretische Folgerungen.

Man kann die Beschäftigung mit reiner Mathematik nicht als Norm verlangen, ebensowenig wie man als Norm das Studium der Mathematik überhaupt verlangen kann. Aber wer sich mündig mit Mathematik beschäftigen will, sollte die hier diskutierten Probleme der Mathematik im Ansatz kennen.

Obwohl die reine Mathematik in vielen Gebieten kein "praktisches Ziel" vor Augen hat, so werfen bestimmte Teilgebiete sie doch Anwendungen ab. Sie dient als Grundlage theoretischer Physik, die ihrerseits Grundlage der Ingenieurswissenschaften ist. Sicher trifft das nicht auf alle Teilgebiete der reinen Mathematik zu. Einige mögen nur sehr entfernte Anwendung in der mathematischen Physik haben oder überhaupt keine. Aber, wer das zum Ausschlussgrund eines mathematischen Areals deklarieren will, der verleugnet das Wesen der Mathematik. Die Mathematik ist in ihrer Begründung und in ihrer Historie selbstgenügsam – trotz teils symbiotischer Beziehungen mit anderen Wissenschaften. Mag sie historisch auch aus anderen Wissenschaften inspiriert sein, so entwickelt sie sich in ihrer Darstellung und in ihrer A-posteriori-Begründung aus sich heraus.

In dieser Entwicklung hat sie nicht nur, wie oben angedeutet, technische Beiträge geleistet (mittelbar und unmittelbar). Auch kulturell stellt sie eine Bereicherung dar. Mathematisches Denken setzt sowohl rigoros-exaktes als auch assoziativ-intuitives Denken voraus und fördert wiederum auch beides. Neben dem Effekt auf den einzelnen ergeben sich auch gesellschaftliche Auswirkungen: Kommunikation über Mathematik wird damit zu einer hochwertigen Form der Kommunikation.

Wie hätte die Mathematik derartige zivilisatorische Dienste leisten können – ohne die Freiheit ihrer Entwicklung?

Literatur

[1] Alten, H. W. *4000 Jahre Algebra.* Springer-Verlag, 2005.

[2] Bailey, D. H. *Exploratory Experimentation and Computation.* The American Mathematical Monthly, vol. 58, No. 10, November 2011.

[3] Deiser, O. *Reelle Zahlen – Das klassische Kontinuum und die natuerlichen Folgen.* Springer-Verlag, 2008.

[4] Franzen, T. *Goedel's Theorem. An incomplete guide to its use and abuse.* Wellesley, Massachusetts, 2005.

[5] Jahnke, H. N. *Geschichte der Analysis.* Spektrum Akademischer Verlag, 1999.

[6] Russell, Bertrand. *Einführung in die mathematische Philosophie.* Holle Verlag, 1960.

[7] Tuschik, Hans-Peter/Wolter, Helmut. *Mathematische Logik - kurz gefaßt.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/Berlin, 2002. 2. Auflage.

[8] Weinberger, J. *Eine erkenntnistheoretische Betrachtung der Mathematik in Zusammenhang mit Kants transzendentaler Aesthetik und der logizistischen Kritik (Jahresarbeit zum mdl. Abitur im Fach Ethik).* 2008.