Beweisbegriff bei Euklid, Bourbaki, Hilbert, Gödel, Gentzen, Appel-Haken, Coq; Computerbeweise und Erkenntnisideale der Mathematik

Tobias Weber

16. April 2012

1 Einleitung

In der Ausarbeitung zu meinem Vortrag im Rahmen des Seminars „Wissenschaftstheorie“ im WS11/12 gehe ich erst auf den Beweisbegriff bei Euklid und Bourbaki und die axiomatisch-deduktive Methode ein. Darauf folgend werden Hilbert, Gödel und Gentzen im Hinblick auf die Entwicklungen im Zuge der sogenannten Grundlagenkrise der Mathematik am Anfang des 20. Jahrhunderts vorgestellt. Im dritten Teil werde ich die Rolle von Computern in der modernen Mathematik, den Beweis des Vierfarbensatzes durch Appel und Haken und anschließend Coq, einen interaktiven Beweisassistenten, untersuchen. Abschließend wird die Funktion von Beweisen und die Entwicklung von Erkenntnisidealen in der Mathematik betrachtet.

2 Euklid

Bei Euklids Beweisen, wie auch bei den meisten anderen Beweisen in den theoretischen Texten der griechischen Mathematiker (von Archimedes oder Aristoteles etwa), werden „Postulate“ ausschließlich auf Basis von Axiomen, Definitionen und bereits bewiesenen Postulaten bewiesen. Dieses Vorgehen, eine allgemeine Aussage anhand schon bewiesener Erkenntnisse und der Axiome abzuleiten, wird auch als axiomatisch-deduktiv bezeichnet und steht im Gegensatz zu den Texten der „angewandten“ Mathematik im antiken Griechenland, die meist aus Instruktionen zur Lösung eines bestimmten Problems bestehen, ohne dabei die benutzten Methoden zu rechtfertigen. [Asp09] In Euklids bekanntem Werk „Elemente“ finden sich Definitionen, wobei diese teils auf den Anschauungsraum bezogen sind, wie z. B. „Ein Punkt ist, was keine Teile hat“ [Euk03] und „Eine Linie ist eine breitenlose Länge.“ [Euk03], Axiome, Postulate (also „Sätze“) und deren Beweise.

Jeder Beweis wird von einem Diagramm begleitet, das den allgemeinen Fall illustriert und auf das der Text sich explizit bezieht. Die Texte sind in einem unpersönlichen Stil geschrieben und enthalten bestimmte, in der Alltagssprache ungebräuchliche, grammatikalische Formen. So wird der Leser nie direkt angesprochen, kein inklusives „wir“

benutzt, keine Informationen über den Autor preisgegeben und abgesehen von dem einleitenden Satz „Ich behaupte, dass ...“ [Euk03], der sich am Anfang jedes Beweises finden lässt, bezieht sich der Autor nie auf sich selbst. [Asp09]

Das Ziel der Beweise ist es, auch ohne ein Gespräch mit dem Autor oder einer anderen Person, den Sachverhalt überzeugend darzustellen, also die Korrektheit der Aussage zu zeigen, sowie Wissen über die Konstruktionen weiterzugeben.

Diese Ausführungen werden im Folgenden am Beispiel des Postulats 30 aus der Übersetzung von Thaer [Euk03] und der Skizze in Abbildung 1 beispielhaft gemacht:

Theorem 1 (Postulat 30 aus [Euk03])**.** *Derselben geraden Linie parallele sind auch einander parallel.*

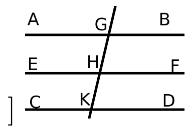


Abbildung 1: Skizze zu Postulat 30 nach [Euk03]

Beweis. A B, C D seien beide ∥ E F. Ich behaupte, dass auch A B ∥ C D.

Man bringe die gerade Linie G K mit ihnen zum Schnitt.

Da die parallelen geraden Linien A B, E F von der geraden Linie G K geschnitten werden, ist A G K = G H F (I,29). Ebenso ist, da die parallelen geraden Linien E F, C D von der geraden Linie G K geschnitten werden G H F = G K D (I29). Wie oben bewiesen, ist A G K = G H F, also ist auch A G K = G K D, sie sind dabei Wechselwinkel. Also ist AB ∥ CD (I, 27) dies hatte man beweisen sollen.

□

Der Anfang des Beweises bzw. die zu beweisende Aussage wird durch eine spezielle Phrase („Ich behaupte, dass ...“) markiert. Das „Ich“ in der eben erwähnten Phrase ist das einzige Wort, das eine Verbindung zum Autor herstellt, wobei, dadurch dass jeder Beweis in den Elementen diese Form enthält, dessen Bedeutung auf die Funktion als Markierung reduziert wird. Eine ähnliche Funktion hat die Schlussphrase „..., dies hatte man beweisen sollen.“, die sich in anderen Formen bis heute durchgesetzt hat („..., was zu zeigen/beweisen war“). Das heute weit verbreitete inklusive „Wir“ findet sich nicht.

Man sieht, dass Euklids Beweise, obwohl sie als Fließtext und ohne viele spezielle mathematische Symbole geschrieben sind, schon relativ stark formalisiert waren und sich von der herkömmlichen Sprache abgrenzten. Bestimmte Schritte wurden immer in der gleichen sprachlichen Form beschrieben. [Asp09]

3 Bourbaki

In den 1930er Jahren wurde der Name „Nicolas Bourbaki“ erstmals von dem heute unter diesem Pseudonym bekannten Autorenkollektiv, unter dessen Gründungsmitgliedern Henri Cartan, Claude Chavalley, Jean Delsarte, Jean Deudonné und André Weil waren, genutzt. Ihre Motivation war Unzufriedenheit mit den damals in Frankreich erhältlichen Lehrbüchern, gerade im Bereich der Analysis, da die damals verbreiteten Werke nicht rigoros und allgemein genug waren. Das Ziel der Gruppe war es also ein modernes und logisch strukturiertes Lehrwerk für die verschiedenen Zweige der Mathematik zu verfassen. Es wurden weder Resultate benutzt, die nicht schon vorher im Text bewiesen wurden, noch gab es Verweise auf andere Werke. Das erste Kapitel erschien 1939 und der letzte Band 1997. [Cor09]

Fragen zu den Grundlagen der Mathematik, wie etwa Widerspruchsfreiheit oder Unabhängigkeit von Axiomen, wurden als für den arbeitenden Mathematiker unerheblich ausgelassen (vgl. das Vorwort von [Bou04]). Eigentlich war der ursprüngliche Gedanke nur naive Mengenlehre einzuführen, statt dem axiomatischen Aufbau der Mengenlehre einen ganzen Band zu widmen. Generell sind die Beweise ein Kompromiss zwischen formaler Strenge und Lesbarkeit und enthalten so etwa auch keine Abbildungen. [Cor09]

Wir können uns die Form der Beweise von Bourbaki anhand des beispielhaften Beweises des „Deductive criterion 32“ in „Theory of Sets“ [Bou04] vor Augen führen. Hier ist zu beachten, dass mit „relations“ Aussagen, mit „letter“ eine Variable und mit „theorem“ eine Aussage, die in einem Beweis vorkommt (also aus den Axiomen abgeleitet werden kann), gemeint sind.

Theorem 2 (Deductive criterion 32 aus [Bou04]). *Let R and S be relations in $\mathcal{T}$, and let x be a letter. Then the relations*

- $(\forall x)$*(R and S)* $\Leftrightarrow$ *(*$(\forall x)$*R and* $(\forall x)$ *S)*
- $(\exists x)$ *(R or S)*$\Leftrightarrow$ *(*$(\exists x)$ *R or* $(\exists x)$ *S)*

are theorems in $\mathcal{T}$*.*

Beweis. It is sufficient to prove these criteria in $\mathcal{T}_0$, in which x is not a constant. If $(\forall x)$(R and S) is true then “R and S“ is true, and therefore each of the relations R, S is true. Consequently each of the relations $(\forall x)$R and $(\forall x)$ S is true, and hence “$(\forall x)$R and $(\forall x)$ S“ is true. Similarly one shows that if “$(\forall x)$R and $(\forall x)$ S“ is true, then$(\forall x)$(R and S) is true. Hence the first theorem. The second follows by applying C29. □

Ähnlich wie bei Euklid wird deutlich, dass der Text sehr unpersönlich ist und es keinerlei Verweise auf den Autor gibt. Ein Beispiel für den Kompromiss zwischen Lesbarkeit und Strenge ist, dass verschiedene Teile ausgelassen wurden („It is sufficient to prove these criteria in $\mathcal{T}_0$“, „Similarly one shows that ...“, „The second follows by applying C29.“).

4 Hilbert

David Hilbert (1862 - 1943) war ein deutscher Mathematiker und ab 1895 Professor in Göttingen.

Hilbert stand vor allem unter dem Einfluss der sogenannten Grundlagenkrise der Mathematik, die Anfang des 20. Jahrhunderts mit der Russel'schen Antinomie begann. Im Folgenden wird Hilberts Versuch diese Krise zu lösen, das Hilbertprogramm, vorgestellt.

Das Hilbertprogramm war der Versuch die Mathematik von Grund auf zu formalisieren, d.h. ihr ein vollständig axiomatisch-deduktives Fundament zu geben, die Konsistenz bzw. Widerspruchsfreiheit der Axiome zu beweisen und Beweise mit „finitistischen“ Methoden durchzuführen, um so eine philosophische Grundlage für die Mathematik aufzubauen. Der Begriff der „finitistischen Methoden“ wurde von Hilbert nie klar definiert. [Smo77]

Hilbert unterscheidet zwischen finitistischen, also auf endlichen Berechnungen und kombinatorischen Manipulationen beruhenden, und allen weiteren, „ideellen“, Methoden. Einen Beweis, der ausschließlich auf finitistischen Methoden beruht, nennt man einen finitistischen Beweis. Das Ziel des Hilbertprogrammes war es, finitistische Begründungen für ideelle Methoden und nicht zuletzt einen finitistischen Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik zu finden. [Zac09]

5 Gödel

Kurt Gödel (1906 - 1978) war ein deutscher Mathematiker, dessen wohl einflussreichstes Resultat die beiden Unvollständigeitssätze sind.

Im Jahr 1931 veröffentlichte Kurt Gödel seine beiden Unvollständigkeitssätze [Smo77]: Sei T eine Theorie die hinreichend viel Arithmetik (es wird auch die Abkürzung PA für Peano Arithmetik bzw. das zugehörige Axiomensystem genutzt) enthält.

Theorem 3. *1. Unvollständigkeitssatz Es existiert ein Satz φ, der seine eigene Unbeweisbarkeit aussagt, so dass, wenn T konsistent ist, weder φ noch $\neg\varphi$ in T ableitbar ist.*

Für den 2. Unvollständigkeitssatz sei die Konsistenzaussage $Con(T)$ die Aussage: „In T lassen sich keine Widersprüche ableiten“.

Theorem 4. *2. Unvollständigkeitssatz Wenn T konsistent ist, dann dann ist Con(T) nicht in T ableitbar.*

Zu den gödelschen Sätzen ist zu bemerken, dass obwohl die nicht beweisbare Aussage, die man im Beweis des ersten Unvollständigkeitssatzes konstruiert („Ich bin nicht beweisbar“), eher unnatürlich ist, es auch „natürlichere“ Aussagen in der Mathematik gibt, die wahr, aber nicht in PA beweisbar sind. Ein Beispiel hierfür ist der Satz von Paris und Harrington, der aussagt, dass eine stärkere Version des Finite Ramsey Theorem, obwohl sie wahr und in PA formulierbar ist, nicht in PA beweisbar ist. [PH77]

Durch den 2. Unvollständigkeitssatz wurde das Ziel des Hilbertschen Programmes für unerreichbar erklärt, obwohl in den folgenden Jahren unklar war, ob man diese Schwierigkeiten nicht durch einen finitischen Beweis, den man nicht in PA formulieren könnte, überwinden könne. Dies wurde aber ab ca. 1934 für unmöglich gehalten, da man alle bis dahin als finitistisch angesehenen Methoden in PA formalisieren konnte. [Smo77]

6 Gentzen

Gerhard Gentzen (1909- 1945) war ein deutscher Mathematiker. Gentzen entwickelte das System des natürlichen Schließens und das Sequenzenkalkül, zwei Systeme um Beweise zu formalisieren. In seinem Hauptsatz zeigte Gentzen, dass für jede Aussage, deren Beweis die Cut-Regel benutzt, auch ein Beweis ohne diese Regel existiert. Dieses Resulat findet auch im später erwähnten Proof-mining Anwendung [Fef96].

Nach mehreren Anläufen gelang es Gentzen im Jahr 1938, einen Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik zu finden. Natürlich konnte dieser Beweis, wegen der gödelschen Sätze, nicht allein auf PA beruhen und benutzt die sogenannte ω-Regel. Eigentlich ist das System in dem Gentzen die Widerspruchsfreiheit von PA beweist nicht mit PA vergleichbar, also sind die verwendeten Axiome weder eine Ober- noch eine Teilmenge der Axiome der Peano Arithmetik [vP08]. Im Folgenden wird eine sehr grobe Skizze des Beweises aus [vP08] vorgestellt.

Mithilfe transfiniter Induktion zu hohen Ordinalzahlen, und damit der ω-Regel, findet Gentzen eine Aussage, die sich in Peano Arithmetik formulieren lässt, für die es dort aber keinen Beweis gibt. Da man aus inkonsistenten Axiomen alle möglichen Aussagen, also auch die mithilfe der ω-Regel formulierte Aussage, beweisen könnte, beweist dies die Widerspruchsfreiheit von PA.

Das Hilbertprogramm in seiner Urform muss man trotz dessen als gescheitert auffassen, da die ω-Regel offensichtlich nicht dem entspricht, was Hilbert als finitistisch akzeptiert hätte. Eine mögliche Lösung ist es ein weniger restriktives „Hilbertprogramm“ zu fordern, das solche Aussagen erlaubt. [vP08]

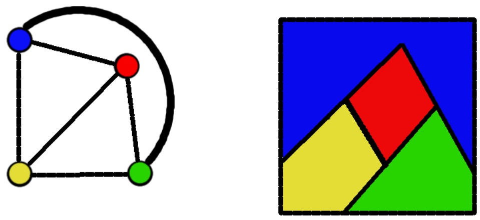
7 Appel-Haken

7.1 Der Vierfarbensatz

Der folgende Satz wird als Vierfarbensatz (vor der Veröffentlichung des Beweises auch Vierfarbenproblem) bezeichnet:

Theorem 5. *Für jeden endlichen, planaren Graphen (V,E) existiert eine 4-Färbung, also eine Funktion* $c : V \to \{1, 2, 3, 4\}$*, so dass für alle* $v_1, v_2 \in V$ $(v_1, v_2) \in E \Rightarrow c(v_1) \neq c(v_2)$.

Um den Satz besser zu illustrieren wird er, wie in Abbildung 2 dargestellt, auch häufig für die Färbung von Landkarten formuliert.



]

Abbildung 2: Vierfärbung eines Graphen und entsprechene Intuition als „Landkarte“

7.2 Beweis des Vierfarbensatzes

Im Jahr 1852 stellte F. Guthrie die Vermutung auf, dass sich jeder planare Graph mit vier Farben färben lässt. Diese Behauptung konnte nach mehreren fehlgeschlagenen Beweisversuchen erst 1977 von Appel und Haken bewiesen werden. Der Beweis bestand aus einem Artikel, in welchem gezeigt wurde, dass eine große Fallunterscheidung hinreichend ist, um den Satz zu beweisen, und einem Computerprogramm zur Behandlung der einzelnen Fälle. Aufgrund des Einsatzes eines Computers als Hilfsmittel bzw. eines Programmes als Teil des Beweises wurde der Beweis angezweifelt. Die meisten Zweifel waren jedoch ausgeräumt, als Robertson et al 2004 mit Hilfe des Beweisassistenten Coq (siehe nächstes Kapitel) den Beweis von Appel und Haken auf Korrektheit untersuchte. [Wei, Dev05]

7.3 Worin besteht die Kritik am Beweis

Die Kritik am Beweis von Appel und Haken besteht hauptsächlich aus den folgenden Punkten.

- Der Beweis ist nicht nachvollziehbar. Um den Beweis auf Korrektheit zu überprüfen ist es nicht ausreichend den Artikel zu verstehen, man muss auch den Quellcode des Computerprogrammes untersuchen. Dies ist schwieriger als einen Beweis der für Menschen geschrieben ist zu überprüfen, da die Kenntniss der Programmiersprache nötig ist und darüberhinaus die Verifizierung der Korrektheit von Software in der Informatik ein großes Problem darstellt.
- Die Funktion des Beweises, bzw. eines computergestützen Beweises im Allgemeinen ist beschränkt, da man aus dem Quellcode nur wesentlich schwieriger Erkenntnisse ziehen kann und er sich nicht im traditionellen Sinne für die Lehre eignet.
- Zur vollständigen Verifikation des Beweises ist es nicht ausreichenden den Artikel und den Quellcode zu überprüfen, da auch die Korrektheit des Compilers und die Hardware geprüft werden müssen.

Diese Kritikpunkte werden im folgenden Abschnitt im Hinblick auf den interaktiven Beweisassistenten Coq näher untersucht.

8 Coq

Coq ist ein interaktiver Beweisassistent und wurde erstmals 1985, damals noch als Coc (nach dem damals genutzten „Calculus of Constructions“), implementiert. Neben Anwendungen in der Lehre wird Coq eingesetzt, um mathematische Theorien zu formalisieren, formale Beweise auf Korrektheit zu prüfen und formale Verifikationen von Programmen im Bereich Softwareengineering durchzuführen.

Wie schon im vorhergehenden Abschnitt erwähnt, wurde Coq 2004 von Robertson et al verwendet, um den Beweis des Vierfarbensatzes auf Korrektheit zu untersuchen. Im Folgenden werde ich kurz auf die Funktionsweise von Coq eingehen und dann die Unterschiede zu dem Computerbeweis von Appel und Haken beschreiben.

8.1 Wie Coq funktioniert

Die Funktionsweise von Coq im Detail zu beschreiben würde den Rahmen dieser Ausarbeitung sprengen. In Anlehnung an die Einleitung von [dt10b]: Coq nutzt die Spezifikationsprache Gallina, um Programme, Eigenschaften von Programmen und Beweise dieser Eigenschaften auszudrücken. Mithilfe des Curry-Howard Isomorphismus werden diese dann im Calculus of Inductive Constructions, einem λ-Kalkül, formuliert und mit einem Type-Checking Algorithmus, der das Herz von Coq darstellt, auf Korrektheit geprüft. Im interaktiven Modus kann man Beweise mit Hilfe von speziellen Programmen („Tactics“) entwickeln.

8.2 Coq im Vergleich zu dem Beweis von Appel und Haken

Es stellt sich die natürliche Frage, warum man den Beweis von Appel und Haken erst, weil er mit Hilfe eines Computerprogrammes durchgeführt wurde, anzweifelt und dann ein anderes Computerprogramm benutzt, um die Zweifel auszuräumen.

In [dt10a] wird die Frage „Was muss man vertrauen, wenn man einen Beweis sieht, der mit Coq überprüft wurde“ mit der folgenden Aufzählung beantwortet:

- Der Theorie, die hinter Coq steckt
- Der Implementierung des Coq Kernels
- Dem Objective Caml Compiler
- Der eigenen Hardware
- Den eigenen Axiomen

Grundsätzlich wurde Coq so entwickelt, dass die „Gefahr“, dass z. B. die Implementierung des Kernels, oder der Caml Compiler Fehler enthalten, möglichst gering gehalten wird. [dt10a]

Ein weiteres Argument ist, dass Coq nicht, wie das Programm von Appel und Haken, für einen speziellen Beweis geschrieben ist, sondern ein universelles Werkzeug zur

Verifikation von Beweisen ist und so von wesentlich mehr Leuten getestet und benutzt wird.

Ein Restrisiko, dass Coq Bugs enthält, lässt sich aber natürlich nicht ausschließen.

9 Funktionen von Beweisen

Im letzten Abschnitt werden einige Aspekte und Fragen zur Funktion von Beweisen und Erkenntnisidealen in der Mathematik angesprochen.

9.1 Mittel zur Verifikation von Aussagen

Gerade im Hinblick auf die Kontroverse um den Beweis des Vierfarbensatzes durch Appel und Haken stellt sich die Frage, was genau man von einem Beweis erwartet. Am Beispiel von Euklid, dessen Beweisbegriff uns bis heute noch stark beeinflusst, haben wir gesehen, dass ein Beweis mehr sein kann als das Prüfen einer Aussage auf Wahrheit, sondern Konstruktionen weitergibt und oft als Lehrmittel verwendet werden kann. Inwiefern rein formale Beweise oder gar Computerbeweise diese Funktion haben, ist fraglich.

Eine andere Perspektive auf formale Beweise und den daraus resultierenden Erkenntnisgewinn stellt das Proof-Mining, das in den 50er Jahren mit Kreisels „Unwinding Program“ begründet wurde, dar. Dort werden aus formalen Beweisen, Beweise für stärkere Aussagen extrahiert. [Fef96]

9.2 Gemeinsame Überzeugung?

In verschiedenen Veröffentlichungen wird der Vorgang, mit dem ein Beweis von Mathematikern als Gruppe akzeptiert wird, vom Standpunkt der Soziologie aus betrachtet, durch einen sozialen Prozess, wie eine „gemeinsame Überzeugung“, begründet und die Mathematik als „quasi-empirische Wissenschaft“ dargestellt [Sch]. Hier möchte ich besonders auf die im Folgenden kurz beschriebene Studie aus [Hei09] eingehen, in der untersucht wird, anhand welcher Kriterien einzelne Mathematiker einen Beweis akzeptieren.

Die Studie wurde in einem sehr kleinen Rahmen durchgeführt, wobei 40 Mathematiker, darunter 15 Professoren und Privatdozenten (in den Diagrammen als „Senior“ bezeichnet) und 35 Postdocs und Doktoranden (in den Diagrammen als „Junior“ bezeichnet), aus den Universitäten Augsburg und München befragt wurden.

Auf den folgenden Diagrammen wird die Verteilung der Antworten unter den verschiedenen Gruppen dargestellt, wobei die Werte der Likert Skala den Antworten wie folgt entsprechen: „Immer“-(4), „häufig“-(3), „manchmal“-(2), „(fast) nie“-(1).

Man stellt in Abbildung 3 fest, dass die „Senior“-Werte immer geringer sind als die „Junior“-Werte. Die Antwort „I checked a proof in detail“ ist in beiden Gruppen die mit dem höchsten Mittelwert auf der Likert Skala. Besonders bemerkenswert ist, dass die „Senior“-Gruppe geringeres Vertrauen gegenüber Peer-review Journals hat als die „Junior“-Gruppe.

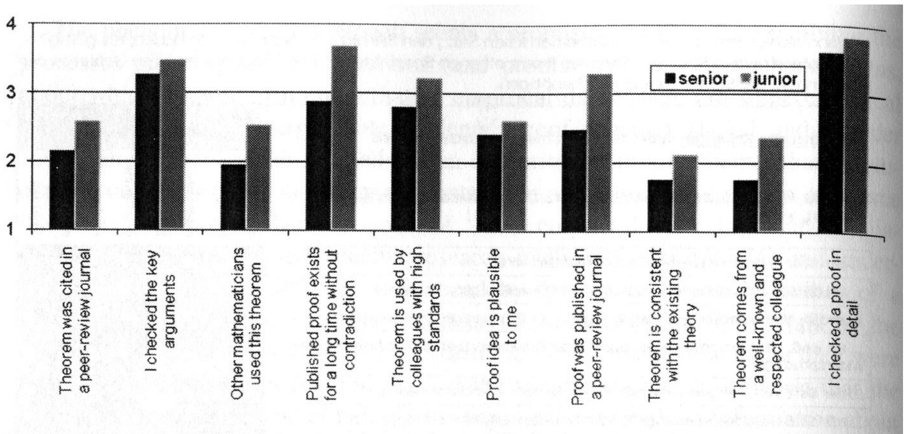


Fig. 8.2 Criteria of junior and senior mathematicians for the acceptance of new theorems in their own research area (mean values of the Likert scale)

Abbildung 3: Kriterien zur Akzeptanz neuer Sätze im eigenen Forschungsbereich (aus [Hei09])

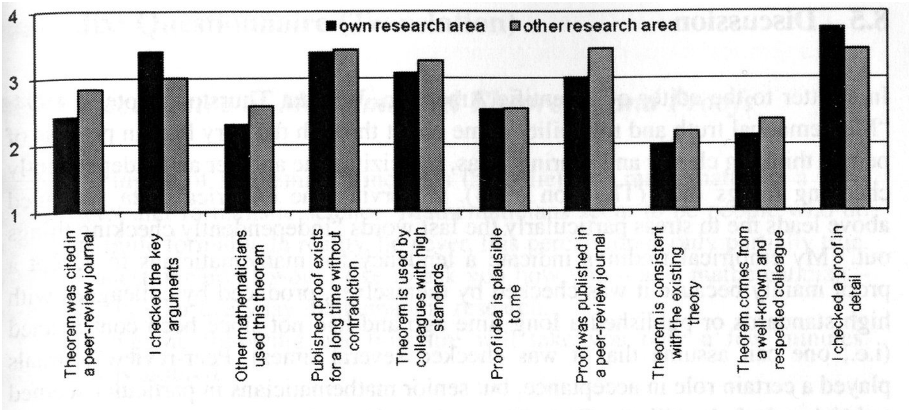


Fig. 8.3 Criteria of mathematicians for the acceptance of new theorems in their own and in other research areas (mean values of the Likert scale)

Abbildung 4: Kriterien zur Akzeptanz neuer Sätze im eigenen Forschungsbereich im Vergleich zu fremden Forschungsbereichen (aus [Hei09])

In Abbildung 4 wird das Akzeptieren von neuen Sätzen im eigenen, gegenüber dem in fremden Forschungsbereichen dargestellt. Wieder erkennt man, dass „I checked a proof in detail“ das Kriterium mit dem höchsten Mittelwert ist. Lediglich Schlüsselargumente zu überprüfen ist interessanterweise im eigenen Forschungsbereich akzeptabler als in einem fremden. Weiter gibt es im fremden Forschungsbereich den generellen Trend sich eher auf Dritte zu verlassen (z.B. Peer-Review, Kollegen mit hohen Standards).

In Abbildung 5 werden die Kriterien beim Überprüfen eines Beweises für Peer-review Journals dargestellt. Wieder sieht man, dass „I checked a proof in detail“ und „I checked the key arguments“ die höchsten Mittelwerte haben.

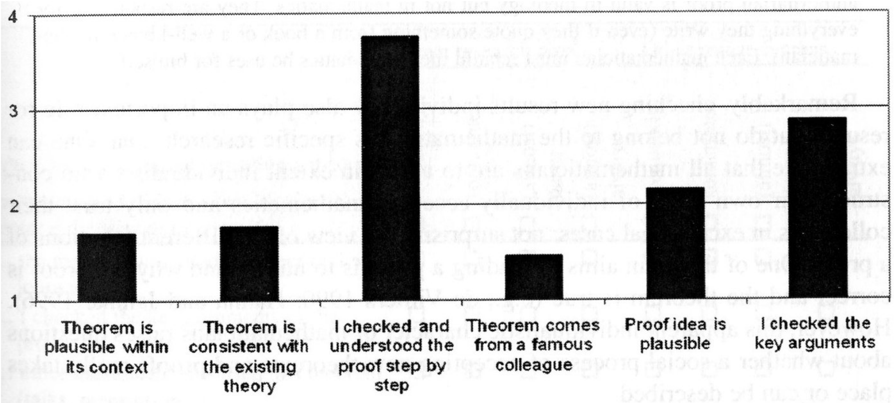


Fig. 8.4 Criteria of mathematicians for the acceptance of new theorems when reviewing a research paper (mean values of the Likert scale)

Abbildung 5: Kriterien zur Akzeptanz neuer Sätze bei der Prüfung für Peer-review Journals (aus [Hei09])

Ohne näher auf die Studie einzugehen, kann man den generellen Trend, sich eher auf selbstständiges Überprüfen im Detail („I checked a proof in detail") zu verlassen, als unterstützendes Argument für [Sch] auffassen, wo Schreiber sich gegen die Auffassung der gemeinsamen Überzeugung („Gruppenakzeptanz wird es wohl kaum geben, ohne die unabhängigen Einzelurteile der Gruppenmitglieder", in [Sch]) und für das klassische Erkenntnisideal der Mathematik ausspricht.

9.3 Experimentelle Mathematik und „The End of Proof"

Ein weiterer Aspekt der Nutzung von Computern in der Mathematik ist die sog. „experimentelle Mathematik", die unter anderem auch in [Hor93] angesprochen wird.

Dort werden mathematische Experimente mit Hilfe von Computern durchgeführt. Das Ziel ist es so neue Einsichten zu gewinnen, möglicherweise Behauptungen aufzustellen bzw. zu widerlegen und Ansätze für Beweise zu finden. Ein Beispiel für ein Problem, das in der experimentellen Mathematik angegangen wird, ist die Collatz'sche 3k+1 Vermutung (auf der Plattform Boinc).

Besonders erwähnenswert ist an dieser Stelle noch das „Journal of Experimental Mathematics", das auf diese Weise gefundene Resultate, Vermutungen aus Experimenten und Ergebnisse, die diese Vermutungen unterstützen, veröffentlicht. Das „Journal of Experimental Mathematics" hat also im Gegensatz zu den meisten mathematischen Journalen nicht den Fokus darauf Beweise zu veröffentlichen bzw. verzichtet bewusst darauf. [oEM12]

Weiter kann man sich die Frage stellen, ob dies das in [Hor93] beschworene „End of Proof" bedeutet oder der Computer nur ein neues Werzeug in der Mathematik ist und das Erkenntnis und Beweisideal davon profitieren wird.

10 Schluss

Die Art auf die wir Beweise betrachten hat sich seit Euklid, nicht zuletzt durch die Entwicklungen um das Hilbertprogramm, gewandelt. Mit der These der „gemeinsamen Überzeugung“ wurde auch die Art des Erkenntnisgewinns in der Mathematik diskutiert und durch den Einsatz von Computern hat sich zusätzlich die Form und Funktion von Beweisen, in einigen Bereichen sogar das Vorgehen der Mathematik überhaupt, verändert („experimentelle Mathematik“). Ob es aufgrund dieser Veränderungen aber, wie es der Titel der Vortragsreihe nahelegt, berechtigt ist von einer Krise der Mathematik im 21. Jahrhundert zu sprechen, halte ich für fraglich.

Literatur

[Asp09] Markus Asper. The two cultures of mathematics in ancient greece. In E. Robson and J.A. Stedall, editors, *The Oxford handbook of the history of mathematics*, Oxford handbooks. Oxford University Press, 2009.

[Bou04] N. Bourbaki. *Elements of mathematics: Theory of sets*. Elements of mathematics. Springer, 2004.

[Cor09] Leo Corry. Writing the ultimate mathematical textbook: Nicolas bourbaki's Éléments de mathématique. In E. Robson and J.A. Stedall, editors, *The Oxford handbook of the history of mathematics*, Oxford handbooks. Oxford University Press, 2009.

[Dev05] Keith Devlin. Last doubts removed about the proof of the four color theorem. In *Devlin's Angle, Mathematical Association of America*. January 2005. `http://www.maa.org/devlin/devlin_01_05.html`, letzter Zugriff 15.3.2012.

[dt10a] The Coq development team. *Coq FAQ Version 8.1*. 2010. `http://coq.inria.fr/faq`, letzter Zugriff 15.3.2012.

[dt10b] The Coq development team. *Reference Manual Version 8.3*. 2010. `http://coq.inria.fr/doc/`, letzter Zugriff 15.3.2012.

[Euk03] Euklid. *Die Elemente*. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Akademische Verlagsgesellschaft, 2003. 4., erw. Aufl. Nach Heibergs Text aus dem Griech. übers. von Clemens Thaer.

[Fef96] Solomon Feferman. Kreisel's 'unwinding program. In *P. Odifreddi (ed.), Kreiseliana, Wellesley, MA 1996*, pages 247–273, 1996.

[Hei09] A. Heinze. Mathematicians' individual criteria for accepting theorems and proofs. In *Explanation and Proof in Mathematics*. Hanna, G. and Jahnke, H.N. and Pulte, H., 2009.

[Hor93] John Horgan. The art of ordinal analysis. *Scientific American*, 2, October 1993.

[oEM12] Journal of Experimental Mathematics. *Aim and Scope, Website des Journal of Experimental Mathematics.* March 2012. `http://www.tandf.co.uk/journals/journal.asp?issn=1058-6458&linktype=1`, letzter Zugriff 15.3.2012.

[PH77] J. Paris and L. Harrington. A mathematical incompleteness in peano arithmetic. In J. Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, pages 1133–1142. North-Holland, Amsterdam, 1977.

[Sch] Alfred Schreiber. Das herstellen einer gemeinsamen Überzeugung. In *Mitteilungen der DMV*, pages 158–159.

[Smo77] C. Smorynski. The incompleteness theorems. In J. Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, pages 821–865. North-Holland, Amsterdam, 1977.

[vP08] Jan von Plato. The development of proof theory. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Fall 2008 edition, 2008.

[Wei] Eric W. Weisstein. Four-color theorem. In *MathWorld–A Wolfram Web Resource.*

[Zac09] Richard Zach. Hilbert's program. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Spring 2009 edition, 2009.