Handout: Beweisbegriff bei Euklid, Bourbaki, Hilbert, Gödel, Gentzen, Appel-Haken, Coq; Computerbeweise und Erkenntnisideale der Mathematik

Seminarvortrag im Seminar „Krise der Wissenschaft im 21. Jahrhundert“ am 10.1.2012 von Tobias Weber

Im ersten Teil des Vortrags wird der Beweisbegriff bei Euklid und Bourbaki, die nicht (direkt) unter dem Einfluss der Grundlagenkrise der Mathematik am Anfang des 20. Jahrhunderts standen, beleuchtet. Ein besonderes Augenmerk liegt hier auf der axiomatischen Methode, Euklids Werk, den „Elementen“, und der Zielsetzung von Bourbakis „Éléments de mathématique“.

Euklid

- Axiomatische Methode
- Beweise (im Gegensatz zu Rechenbeispielen)
- Spezielle Sprache und spezielle Form, um mit anderen Mathematikern zu kommunizieren

Bourbaki

- Versuch ein axiomatisch begründetes, modernes und zusammenhängendes Lehrwerk für die Grundlagen der mathematischen Disziplinen zu schaffen
- Größtmögliche Allgemeinheit, kein Benutzen von Resultaten, die später bewiesen werden
- Auslassen von Fragen zur Widerspruchsfreiheit

Der zweite Abschnitt des Vortrags dreht sich um den Beweisbegriff von Hilbert, Gödel und Gentzen, gerade im Bezug auf das Hilbertprogramm und die von Gentzen bewiesene Widerspruchsfreiheit der Arithmetik.

Hilbert

- Grundlagenkrise
- Hilbertprogramm
- Finitismus und ideelle Mathematik
- Frage nach einem Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Axiome der Arithmetik (2. Problem)

Gödel

- Unvollständigkeitssätze
- Ist mit dem 2. Unvollständigkeitssatz das Hilbertprogramm gescheitert?

Gentzen

- Beweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik
- Zusammenhang dessen mit Hilberts Programm und Gödels Unvollständigkeitssätzen

Der dritte Teil des Vortrags widmet sich dem Beweis des Vier-Farben-Satzes durch Appel und Haken und der damit verbundenen Kontroverse. Mit dem interaktiven Beweisassistenten Coq wird weiter auf die Thematik computergestützter Beweise eingegangen und untersucht inwiefern diese den Erkenntnisidealen der Mathematik entsprechen.

Appel-Haken

- Der Vier-Farben-Satz
- Kritik am Beweis von Appel und Haken

Coq

Im vierten Teil wird die Frage nach der Funktion von Beweisen und den verschiedenen Sichtweisen auf den Erkenntnisgewinn in der Mathematik gestellt. Es wird der Beweis als sozialer Prozess bzw. Wahrheit aus gemeinsamer Überzeugung, sowie der Beweis als Träger von mathematischem Wissen betrachtet. In diesem Zusammenhang wird auch Proof-mining und die Sichtweise, dass ein Beweis weit mehr ist bzw. sein kann als die bloße Verifikation der Wahrheit einer Aussage, angesprochen. Weiter wird die „experimentelle Mathematik“ und die damit verbundene Rolle von Beweisen beleuchtet.

Welche Funktion erfüllen Beweise

Zeigen von Korrektheit

- Wahrheit als gemeinsame Überzeugung
- Formale (bzw. maschinelle) Verifikation und intellektuelles "Nachvollziehen"
- Einsicht und Verständnis
- Proof-mining
- Beweise als "Träger des mathematischen Wissens"

Experimentelle Mathematik

- Experimente in der Mathematik
- Journal of Experimental Mathematics

Literatur:

[1] Eleanor Robson and Jacqueline Stedall, *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, Oxford University Press, 2009

[2] Zach, Richard, "Hilbert's Program", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2009 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/hilbert-program/

[3] von Plato, Jan, "The Development of Proof Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2008 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/proof-theory-development/

[4] Gonthier, Georges (2005), *A computer-checked proof of the four colour theorem*, http://research.microsoft.com/en-us/um/people/gonthier/4colproof.pdf

[5] Coq FAQ, http://coq.inria.fr/faq

[6] Gila Hanna, Hans Niels Jahnke, Helmut Pulte, *Explanation and Proof in Mathematics*, Springer, 2010