Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen
7. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner
Walter Reußwig

Wintersemester 2011/2012
31. Jan. / 01. Feb. 2012

Gruppenübung

Aufgabe G21 (Jordansche Normalform)

(i) Bilden Sie neue Gruppen, sodass in jeder Gruppe mindestens eine Person in der Lage ist, zu einer Matrix eine Basis aus Eigen- und Hauptvektoren zu bestimmen (Stichwort: *Jordansche Normalform*).

(ii) Erklären Sie sich untereinander, wie man eine Basis aus Eigen- und Hauptvektoren zu einer Matrix bestimmt. Verwenden Sie, wenn Sie möchten, die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(iii) Verwenden Sie Ihre Kenntnisse nun dazu, ein Fundamentalsystem der DGL $x'(t) = Ax(t)$ für obiges A zu bestimmen.

Lösungshinweise:

1. $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$
2. Hauptvektor-Basis:
   $\lambda_{1,2} = 1: \ (A - \mathbb{1})v_1 = 0 \ \Rightarrow \ v_1 = (1,1,0)^t$,
   Bestimme Hauptvektor: $(A - \mathbb{1})v_2 = v_1 \ \Rightarrow \ v_2 = (0,0,-1)^t$.
   $\lambda_3 = 2: \ (A - 2\mathbb{1})v_3 = 0 \ \Rightarrow \ v_3 = (0,1,1)$.
3. Allgemeine Lösung: $x(t) = c_1 e^t v_1 + c_2 e^t (v_2 - t v_1) + c_3 e^{2t} v_3$.

Aufgabe G22 (Exakte DGLn)

Überprüfen Sie nachfolgende DGLn auf Exaktheit. Finden Sie gegebenenfalls einen integrierenden Faktor und bestimmen Sie dann die allgemeine Lösung.

(i) $2ty + (2y + t^2)y' = 0$

(ii) $tyy' + t^2 + y^2 + t = 0$

Lösungshinweise:

(i) Wir setzen $h(t,y) = 2ty$ und $g(t,y) = 2y + t^2$. Dann gilt $\frac{\partial h}{\partial y} = 2t = \frac{\partial g}{\partial t}$. Also ist die DGL exakt. Wir bestimmen die Potentialfunktion durch Integration über t und y und die dabei auftretenden Integrationskonstanten.

$$\begin{aligned} S(t,y) =& \int 2ty\,dt + c_1(y) = t^2 y + c_1(y) \\ \overset{!}{=}& \int 2y + t^2\,dy + c_2(t) = y^2 + t^2 y + c_2(t) \\ \Rightarrow\ S(t,y) =& t^2 y + y^2 \end{aligned}$$

Aus der impliziten Lösung $S(t,y) = S(t_0,y_0)$ erhalten wir eine explizite Lösung

$$\begin{aligned} yt^2 + y^2 =& y_0 t_0^2 + y_0^2 \\ \Rightarrow \qquad y =& -\frac{t^2}{2} \pm \sqrt{\frac{t^4}{4} + y_0 t_0^2 + y_0^2}. \end{aligned}$$

(ii) Wir setzen $h(t,y) = t^2 + y^2 + t$ und $g(t,y) = yt$. Dann gilt $\frac{\partial h}{\partial y} = 2y \neq y = \frac{\partial g}{\partial t}$. Also ist die DGL nicht exakt. Allerdings kann man den integrierenden Faktor $M(t) = t$ erraten. Die DGL

$$M(t)h(t,y) + M(t)g(t,y)y' = 0$$

ist exakt. Wir bestimmen die Potentialfunktion durch Integration über t und y und die dabei auftretenden Integrationskonstanten.

$$\begin{aligned} S(t,y) =& \int t^3 + ty^2 + t^2\,dt + c_1(y) = \tfrac{1}{4}t^4 + \tfrac{1}{2}t^2y^2 + \tfrac{1}{3}t^3 + c_1(y) \\ \overset{!}{=}& \int yt^2\,dy + c_2(t) = \tfrac{1}{2}y^2t^2 + c_2(t) \\ \Rightarrow\ S(t,y) =& \tfrac{1}{2}y^2t^2 + \tfrac{1}{4}t^4 + \tfrac{1}{3}t^3 \end{aligned}$$

Aus der impliziten Lösung $S(t,y) = S(t_0,y_0)$ erhalten wir eine explizite Lösung

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}y^2t^2 + \tfrac{1}{4}t^4 + \tfrac{1}{3}t^3 =& \tfrac{1}{2}y_0^2t_0^2 + \tfrac{1}{4}t_0^4 + \tfrac{1}{3}t_0^3 \\ \Rightarrow \qquad y =& \pm\sqrt{\tfrac{2}{t^2}\left(-\tfrac{1}{4}t^4 - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{2}y_0^2t_0^2 + \tfrac{1}{4}t_0^4 + \tfrac{1}{3}t_0^3\right)}. \end{aligned}$$

Aufgabe G23 (Lineare DGL)
Bestimmen Sie eine 3×3-Matrix A, sodass die Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt.

Lösungshinweise: In der Basis aus Eigenvektoren ist Abbildungsmatrix durch

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Eigenvektoren kann man aus dem Fundamentalsystem ablesen:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrix ist daher $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und ihre Inverse $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Die Matrix A ist nun gegeben durch $A = SA_dS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe G24 (Asymptotisches Verhalten)
Sei $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ eine lineare Abbildung und sei $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $x'(t) = Ax(t)$ mit $x(t_0) = x_0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$.
Geben Sie Bedingungen dafür an, dass $\lim_{t\to\infty} ||x(t)|| = \infty$ oder $\lim_{t\to\infty} ||x(t)|| = 0$ ist.

Lösungshinweise: Nehmen wir an A sei diagonalisierbar. Dann wählen wir eine Basis aus Eigenvektoren $b_1, \dots, b_n$ und bezeichnen den jeweiligen Eigenraum zum EW λ_k mit E_{λ_k}. Wir zerlegen $x(t)$ bezüglich der E_{λ_k}, so dass $x(t) = \sum_k x_k(t) b_k$.
Gilt jetzt $x_k(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so ist für alle $t > t_0$ $x_k(t) \neq 0$ und insbesondere $x_k(t) = e^{A(t-t_0)} x_k(t_0) = e^{\lambda(t-t_0)} x_k(t_0)$. Wir unterscheiden jetzt drei Fälle.
<u>Fall 1:</u>
$x(t_0)$ besitzt einen Anteil $x_k(t_0)$ am Eigenvektor b_k mit $\Re(\lambda_k) > 0$. Dann gilt $\lim_{t\to\infty} ||x(t)|| \geq \lim_{t\to\infty} ||x_k(t)|| = \lim_{t\to\infty} ||e^{\Re(\lambda_k)(t-t_0)} e^{i\Im(\lambda_k)(t-t_0)} x_k(t_0)| = \lim_{t\to\infty} |e^{\Re(\lambda_k)(t-t_0)}| \, ||x_k(t_0)|| = \infty$.
<u>Fall 2:</u>
$x(t_0)$ besitzt einen Anteil $x_k(t_0)$ am Eigenvektor b_k mit $\Re(\lambda_k) = 0$. Dann gilt $||x_k(t)|| = ||x_k(t_0)||$. Das bedeutet $\lim_{t\to\infty} ||x(t)|| = \infty$ nur dann, wenn $x(t)$ weitere Anteile an mindestens einem Eigenvektor b_k mit $\Re(\lambda_k) > 0$ besitzt.
<u>Fall 3:</u>
$x(t_0)$ besitzt einen Anteil $x_k(t_0)$ am Eigenvektor b_k mit $\Re(\lambda_k) < 0$. Dann gilt genauso $||x_k(t)|| = |e^{\Re(\lambda_k)}(t - t_0)| \, ||x_k(t_0)||$. Daher gilt $\lim_{t\to\infty} ||x_k(t)|| = 0$, und $||x(t)|| \to 0$ nur dann, wenn $x(t_0)$ nur Anteile an Eigenvektoren b_k mit $\Re(\lambda_k) < 0$ besitzt.

Falls A nicht diagonalisierbar ist, kann man immer noch eine Basis aus Eigen- und Hauptvektoren bilden. Seien v_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ und $v_2, \dots, v_n$ Hauptvektoren. Für die Hauptvektoren gilt $e^{A(t-t_0)} v_n = e^{\lambda(t-t_0)}(v_n + t v_{n-1} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} v_1)$.
Da $e^{\lambda t}$ schneller wächst bzw. fällt als jedes Polynom $p(t)$ in t, wird das Verhalten von $e^{\lambda(t-t_0)}(v_n + t v_{n-1} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} v_1)$ für $t \to \infty$ durch $e^{\lambda(t-t_0)}$ bestimmt. Das bedeutet $e^{A(t-t_0)} v_k$, $k = 2, \dots, n$ verhält sich genauso wie $e^{\lambda(t-t_0)} v_1$ für den dazu gehörigen Eigenvektor v_1.

Hausübung

Die folgenden Aufgaben sind für das Erreichen des Bonus **nicht** relevant, aber natürlich sinnvoll, um sich mit dem Stoff vertraut zu machen. Abgeben können Sie Ihre Lösungen entweder in den Sprechstunden der Übungsleiter oder in den Complex Analysis-Übungen. Wie die Rückgabe der korrigierten Abgaben erfolgt wird über die Homepage der Veranstaltung bekannt gegeben.

Aufgabe H22 (Lineares AWP)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

Lösen Sie dann das AWP für den Anfangswert $x(0) = (1,\ 1,\ \sqrt{2}-1)^T$.

Lösungshinweise: Wir bestimmen EWe und EVen zu $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}$ und $v_1 = (1,-2,0)^T$, $v_2 = (-1,1,-\sqrt{2}+1)^T$, $v_3 = (-1,1,\sqrt{2}+1)^T$.
Als allgemeine Lösung ergibt sich: $x(t) = c_1 e^t v_1 + c_2 e^{\sqrt{2}t} v_2 + 3e^{-\sqrt{2}t} v_3$.
Wir setzen $t = 0$ und lösen das Gleichungssystem $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = (1,1,\sqrt{2}-1)^T$. Es ergibt sich $c_1 = -2$, $c_2 = -\sqrt{2}$, $c_3 = \sqrt{2}-3$.

Aufgabe H23 (Spezielle Lösung)
Sei $\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem von Lösungen eines homogenen linearen DGL-Systems mit konstanten Koeffizienten, $x'(t) = Ax(t)$, $A \in M_n$.
Wir schreiben $\Phi(t)$ für die Matrix $\Phi(t) := (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$, d.h. wir schreiben die Fundamentallösungen $\phi_i(t)$ in die Spalten der Matrix $\Phi(t)$.

Zeigen Sie, dass dann $x(t) = \Phi(t)u(t)$ mit $u(t) = \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds$ eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL $x'(t) = Ax(t) + b(t)$ ist.

Hinweis: Dieses Vorgehen spart oft einige Rechenschritte, da man keine Exponentialmatrix aus der Eigen- bzw. Hauptvektorbasis rücktransformieren muß.

Lösungshinweise: Da jedes $\phi_i(t)$ eine Lösung der DGL ist, gilt $\Phi'(t) = A\Phi(t)$. Außerdem ist $u'(t) = \left(\int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds\right)' = \Phi(t)^{-1} b(t)$. Wir differenzieren nun $x(t) = \Phi(t)u(t)$:

$$x'(t) = \Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u'(t) = A\Phi(t)u(t) + \Phi(t)\Phi(t)^{-1}b(t) = Ax(t) + b(t)\ .$$

Also ist $x(t)$ eine Lösung der inhomogenen DGL.

Aufgabe H24 (Lineare DGLen)

i) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$.

ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) - y(t) = \sinh t\ .$$

Lösungshinweise:

i) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Dann A hat die EWe $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 7$ mit zugehörigen EVen $v_1 = (-2,1)^t$ und $v_2 = (1,3)^t$. D.h. die Spalten von $\Phi(t) = \begin{pmatrix} -2 & e^{7t} \\ 1 & 3e^{7t} \end{pmatrix}$ bilden ein Fundamentalsystem und $\Phi(t)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ e^{-7t} & 2e^{-7t} \end{pmatrix}$.

Nun zur speziellen Lösung $x_i(t) = \Phi(t)u(t)$ (siehe H23).

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t \Phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} s \\ \sin s \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}s + \frac{1}{7}\sin s \\ \frac{1}{7}se^{-7s} + \frac{2}{7}e^{-7s}\sin s \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{14}t^2 - \frac{1}{7}\cos t + \frac{1}{7} \\ \frac{-175t-25-49\cos t-343\sin t}{8575}e^{-7t} + \frac{74}{8575}) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Daher erhalten wir $x_i(t) = \Phi(t)u(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}t^2 - \frac{1}{49}t - \frac{99}{343} + \frac{7}{25}\cos t - \frac{1}{25}\sin t + \frac{74}{8575}e^{7t} \\ -\frac{3}{14}t^2 - \frac{3}{49}t + \frac{46}{343} - \frac{4}{25}\cos t - \frac{3}{25}\sin t + \frac{222}{8575}e^{7t} \end{pmatrix}$.

ii) Die Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist $\lambda = 1$. Das bedeutet $x_h(t) = ce^t$ ist die homogene Lösung. Also ist (mit $\sinh(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{2}$)

$$x_i = e^t \int_0^t e^{-s}\sinh s\, ds = e^t\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}(e^{-t} - e^t) = \frac{1}{2}(te^t - \sinh t).$$

Die allgemeine Lösung ist daher von der Form $x(t) = x_h(t) + x_i(t)$.