Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen
6. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner
Walter Reußwig

Wintersemester 2011/2012
17./18. Januar 2012

Gruppenübung

Aufgabe G18 (Standardgegenbeispiel)
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = x(t)^{\frac{2}{3}}, \qquad x(0) = 0.$$

(i) Welche Lösung dieses AWPs lässt sich sofort erraten?

(ii) Bestimmen Sie eine weitere Lösung durch Trennung der Variablen.

(iii) Setzen Sie die Lösungen aus (i) und (ii) zu weiteren (stückweise definierten) Funktionen zusammen, die ebenfalls das AWP lösen.
Hinweis: Welche Nullstellen haben die Lösungen aus (ii)?

(iv) Lösen Sie den scheinbaren Widerspruch zum lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf auf.

Lösungshinweise:

(i) Offensichtlich ist durch $x(t) \equiv 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung gegeben.

(ii) Wir nutzen Trennung der Variablen als Methode, um eine weitere Lösung zu erraten:

$$x' = x^{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad 3x^{\frac{1}{3}} = t + c \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{27}(t+c)^3.$$

Die Anfangsbedingung $x(0) = \frac{1}{27}(0+c)^3 \overset{!}{=} 0$ legt die Konstante zu $c = 0$ fest. Durch einsetzen verifiziert man leicht, dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt.

(iii) Für $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ sind die (differenzierbaren) Funktionen

$$x_{a,b}(t) := \begin{cases} \frac{1}{27}(t+a)^3, & t \leq -a, \\ 0, & -a < t < b, \\ \frac{1}{27}(t-b)^3, & t \geq b. \end{cases}$$

ebenfalls Lösungen des AWP.

(iv) Um den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf anwenden zu können, muss die „rechte Seite“ in x lokal Lipschitz-stetig sein. Dies ist hier nicht der Fall. Dass es eine Lösung geben muss, wird auch durch den *Existenzsatz von Peano* gesichert, der nur die Stetigkeit der „rechten Seite“ verlangt, aber nicht mehr die Eindeutig der Lösung garantiert.

Aufgabe G19 (Spezielle Lösungsansätze eindimensionaler DGLn)
Zeigen Sie, dass man jede der folgenden Differentialgleichungen mit der angegebenen Substitution auf eine lineare DGL bzw. eine DGL mit getrennten Variablen zurückführen kann. Dabei sind $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$ und f, g Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(i) $x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right)$; Substitution $u(t) = \frac{x(t)}{t}$.
Hinweis: In diesem Fall ergibt sich die DGL $u'(t) = \frac{f(u(t))-u(t)}{t}$. Hat man das entsprechende AWP für $u(t)$ gelöst, so erhält man daraus die gesuchte Lösung für $x(t)$.

(ii) $x'(t) = f(at + bx(t) + c)$; Substitution $u(t) := at + bx(t) + c$.

(iii) $x'(t) = f(t)x(t) + g(t)x^{\alpha}(t)$, $\alpha \notin \{0, 1\}$; Substitution $u(t) := x^{1-\alpha}(t)$.
Diese DGL heißt auch *Bernoulli-Differentialgleichung*.

Lösungshinweise:

(i) Mit dieser Substitution erhalten wir

$$x(t) = u(t) \cdot t, \qquad \text{also} \qquad x'(t) = u'(t) \cdot t + u(t)$$

und damit

$$u'(t) \cdot t + u(t) = x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right) = f(u(t)) \qquad \Rightarrow \qquad u'(t) = \frac{f(u(t)) - u(t)}{t},$$

also eine DGL mit getrennten Variablen.

(ii) Mit der Substitution $u(t) = at + bx(t) + c$ ergibt sich

$$u'(t) = a + bx'(t) = a + bf(u(t)),$$

also eine DGL mit getrennten Variablen.

(iii) Mit der Substitution $u(t) = x(t)^{1-\alpha}$ folgt

$$\begin{aligned} & u'(t) = (1-\alpha)x^{-\alpha}(t)x'(t) \overset{\alpha\neq 1}{\Rightarrow} x'(t) = \tfrac{1}{1-\alpha}u'(t)x^{\alpha}(t) \\ \Rightarrow\ & \tfrac{1}{1-\alpha}u'(t)x^{\alpha}(t) = x'(t) = f(t)x(t) + g(t)x^{\alpha}(t) \quad | \cdot (1-\alpha)x^{-\alpha}(t),\ x(t) \neq 0 \\ \Rightarrow\ & u'(t) = (1-\alpha)(f(t)x(t)x^{-\alpha}(t) + g(t)) = (1-\alpha)(f(t)u(t) + g(t)), \end{aligned}$$

also eine lineare DGL.

Aufgabe G20 (Herrchen & Hund)
Durch die x-y-Ebene fließt ein Fluss, dessen Ufer durch $x = 0$ und $x = 1$ gegeben sind. Er fließt mit konstanter und homogener Geschwindigkeit v_0 in positive y-Richtung. Ein Hund springt im Punkt $(1, 0)$ in den Fluss und versucht, sein Herrchen zu erreichen, welches in $(0, 0)$ auf ihn wartet. Der Hund schwimmt mit konstanter Geschwindigkeit v_1 und richtet sich immer genau auf sein Herrchen, während er abgetrieben wird.

(i) Stellen Sie eine DGL für die Kurve $y(x)$ des Hundes auf und bestimmen Sie eine Lösung.
Hinweis: Stellen Sie zunächst die Bewegungsgleichung des Hundes auf und bestimmen Sie $\frac{dy}{dx}$ unter Verwendung der Kettenregel.

(ii) Untersuchen Sie die Kurve des Hundes in Abhängigkeit des Geschwindigkeitsverhältnisses $\frac{v_0}{v_1}$.
Hinweis: Unterscheiden Sie mehrere Fälle und nutzen Sie, dass $\sinh(\ln(a)) = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})$ ist.

Lösungshinweise:

i) Wir stellen die Bewegungsgleichung des Hundes auf:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'(t) = \underbrace{-\frac{v_1}{\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{1.} + \underbrace{v_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{2.} .$$

Der erste Term steht hier für den Geschwindigkeitsanteil in Richtung des Herrchens und der zweite Term für den Abtrieb durch den Fluss. Hieraus können wir die DGL der Bahn bestimmen. Seien $f : [0, \infty) \to \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$ und $g : [0, \infty) \to \mathbb{R} : t \mapsto x(t)$ die Koordinatenfunktionen der Kurve des Hundes. Dann folgt mit $t = g^{-1}(x)$ und Ketten- und Umkehrregel:

$$\frac{d}{dx}y(t) = \frac{d}{dx}f(g^{-1}(x)) = \frac{d}{dt}f(g^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx}g^{-1}(x) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{1}{\frac{d}{dt}g(g^{-1}(x))} = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{1}{\frac{d}{dt}g(t)}.$$

Also ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-v_1 y}{\sqrt{x^2+y^2}} + v_0}{\frac{-v_1 x}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{y}{x} - \frac{v_0}{v_1}\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} .$$

Diese DGL lösen wir mit Hilfe der Substitution $z = \frac{y}{x}$. Es gilt $\frac{dy}{dx} = \frac{d(zx)}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$.

$$\begin{aligned} z + x\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} &= z - \frac{v_0}{v_1}\sqrt{1+z^2} \\ \Rightarrow \frac{dz}{dx} &= -\frac{v_0}{v_1 x}\sqrt{1+z^2} \end{aligned}$$

Mittels Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} &= -\int \frac{v_0}{v_1}\frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \quad \operatorname{arcsinh} z &= -\frac{v_0}{v_1}\ln x + c \\ \Rightarrow \quad z(x) &= \sinh(-\frac{v_0}{v_1}\ln x + c) \\ \Rightarrow \quad y(x) &= x\sinh(-\frac{v_0}{v_1}\ln x) = x\sinh(\ln x^{-\frac{v_0}{v_1}}) = \tfrac{1}{2}x(x^{-\frac{v_0}{v_1}} - x^{\frac{v_0}{v_1}}) \end{aligned}$$

ii) Wir untersuchen $y(x) = \frac{1}{2}(x^{1-\frac{v_0}{v_1}} - x^{1+\frac{v_0}{v_1}})$:
1. Fall $v_1 > v_0$: Wir erhalten $y(0) = 0$ für $x = 0$. Das bedeutet, dass der Hund sein Herrchen erreicht.
2.Fall $v_1 = v_0$: Wir erhalten als Bahn $y(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$. Daher kommt der Hund an der Stelle $y = \frac{1}{2}$ am Ufer an und muss noch etwas laufen.
3.Fall $v_1 < v_0$: Wir erhalten $\lim_{x \to 0} y(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2}(x^{1-\frac{v_0}{v_1}} - x^{1+\frac{v_0}{v_1}}) = \infty$. Der Hund wird abgetrieben und erreicht weder sein Herrchen noch das Ufer.
(Keine Angst. In den unveröffentlichen Nebenbedingungen existiert ein tierliebendes Team der Wasserschutzpolizei mit hinreichend starkem Motorboot, sodass stets $v_{Boot} > v_0 > v_1$.)

Hausübung

Aufgabe H18 (Picard-Iteration) (1 Punkt)

Gegeben seien die Anfangswertprobleme

$$\text{a)} \quad x'(t) = x(t),\ x(0) = x_0 \qquad \text{und} \qquad \text{b)} \quad y'(t) = t\,y(t) + t^3,\ y(0) = 0.$$

(i) Führen Sie jeweils die Picard-Iteration durch und bestimmen Sie Intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ auf denen die Funktionenfolge $x_n(t)$ bzw. $y_n(t)$ gleichmäßig gegen eine Lösung konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass die Lösung durch eine auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe gegeben ist und bestimmen Sie deren Grenzfunktion.

Hinweis: $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n n!$

Lösungshinweise:

(i) Beachten Sie, dass hier $t_0 = 0$ gilt. Wir verwenden die Bezeichnung aus der Vorlesung:

zu a):

Wir wählen $a = b > 0$ mit $K := [-b, b] \times \overline{K_a(x_0)}$. Auf K gilt $|f(t,x)| = |x(t)| \leq b + |x_0| =: M$ für alle $(t,x) \in K$. Für $s := \min(b, \frac{b}{M}) = \min(b, \frac{b}{b+|x_0|})$ liefert der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf gleichmässige Konvergenz der Iterationsfolge auf $[-s,s]$. Wir wählen (zum Beispiel) $b = 1$.

Die Picard-Iteration liefert nun:

$$\begin{aligned}
x_0(t) \equiv& x(0) = x_0, \\
x_1(t) =& x_0 + \int_0^t x_0\,ds = (1+t)x_0, \\
x_2(t) =& x_0 + \int_0^t (1+s)x_0\,ds = (1 + t + \frac{t^2}{2})x_0.
\end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} x_0 \tag{*}$$

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t \sum_{k=0}^{n} \frac{t}{k!} x_0\,ds = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!},$$

d.h., (*) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} x_0 = e^t x_0.$$

b):

Wir wählen $a = b > 0$ mit $K := [-b, b] \times \overline{K_a(y_0)}$. Auf K gilt $|f(t,y) = t y(t) + t^3| = |ty + t^3| \leq b^2 + b^3 =: M$ für alle $(t,x) \in K$. Für $b > 0$ und $s := \min(b, \frac{b}{M}) = \min(b, \frac{1}{b(1+b)})$ liefert Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf gleichmässige Konvergenz der Iterationsfolge auf $[-s + t_0, s + t_0]$. Wir wählen wieder $b = 1$. Das liefert $s = \frac{1}{2}$.

Die Picard-Iteration liefert nun

$$\begin{aligned}
y_0(t) \equiv& y_0 = 0, \\
y_1(t) =& y_0 + \int_0^t s y_0(s) + s^3\,ds = 0 + \left.\tfrac{s^4}{4}\right|_0^t = \tfrac{t^4}{4}, \\
y_2(t) =& 0 + \int_0^t s\frac{s^4}{4} + s^3\,ds = \frac{t^6}{4 \cdot 6} + \frac{t^4}{4}.
\end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir

$$
\begin{aligned}
y_n(t) &= \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{4\cdot 6} + \cdots + \frac{t^{2n+2}}{4\cdot 6\cdots(2n+2)} \\
y_{n+1}(t) &= \int_0^t s^3 + \frac{s^5}{4} + \frac{s^7}{4\cdot 6} + \cdots + \frac{s^{2n+3}}{4\cdot 6\cdots(2n+2)}\, ds = \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{t^{2n+4}}{4\cdot 6\cdots(2n+4)},
\end{aligned}
\tag{*}
$$

d.h., (*) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. D.h. (Hinweis!)

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^{k-1}k!} = 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k \\
&= 2\left(-1 - \frac{t^2}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k\right) \\
&= -2 - t^2 + 2e^{\frac{t^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

(ii) zu a) & b): Man rechnet direkt nach, dass $x(t)$ bzw. $y(t)$ aus (i) Lösungen sind, und da die Potenzreihen für alle $t \in \mathbb{R}$ konvergieren, ist $x(t)$ bzw. $y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ Lösung.

Aufgabe H19 (Fortsetzen von Lösungen) (1 Punkt)

(i) Lösen Sie das AWP

$$
y'(t) = 2ty^2(t), \quad y(0) = y_0 > 0.
$$

(ii) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich Ihrer Lösung an. Verlässt der Graph Ihrer Lösung tatsächlich jedes den Anfangswert y_0 enthaltende Kompaktum in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (vgl. Vorlesung)?

Lösungshinweise:

i) Da $\phi(t) = 0$ eine Lösung der DGL zum AW $y_0 = 0$ ist, muss für alle Lösungen $y(t)$ zu AWen $y_0 > 0$ gelten, $y(t) > 0$ sein. Wir formen daher um

$$
2t = \frac{y'(t)}{y^2(t)}, \; y(0) = y_0 \,.
$$

Integration und Substitution von $s = y(t)$ ergibt

$$
t^2 = 2\int_0^t x\, dx = \int_0^t \frac{y'(x)}{y^2(x)}\, dx = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{s^2}\, ds = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(t)}.
$$

Wir erhalten

$$
y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t^2}.
$$

ii) Die Funktion hat an den Stellen $t = \pm\frac{1}{\sqrt{y_0}}$ einen Pol. Das maximale Existenzintervall ist daher $I_{max} = (-\sqrt{y_0}, \sqrt{y_0})$.

Aufgabe H20 (DGLn) (1 Punkt)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGLn.

(i) $y'(t) = e^y \cos t$.

(ii) $ty'(t) - 2y(t) = t^2\sqrt{y(t)}, \; y(1) = 1,$ wobei $I = (0, \infty)$ ist.

Lösungshinweise:

(i) Mittels Trennung der Variablen bestimmen wir eine Lösung der DGL

$$\begin{aligned} y'(t) =& e^y \cos t \\ \left(\Rightarrow \quad \frac{dy}{e^y} =\right.& \left.\cos t\, dt\right) \\ \Rightarrow \quad \int_{y_0}^{y} e^{-u}\, du =& \int_{t_0}^{t} \cos s\, ds \\ \Rightarrow \quad e^{-y} =& -\sin t + \sin t_0 - e^{-y_0} \\ \Rightarrow \quad y(t) =& -\ln(-\sin t + \sin t_0 - e^{-y_0})\,. \end{aligned}$$

(ii) Hier liegt eine Bernoulligleichung mit $\alpha = \frac{1}{2}$ vor. Dementsprechend substituieren wir (**G19**) $z = y^{\frac{1}{2}}$ und erhalten:

$$z' = \frac{1}{2\sqrt{y(t)}} y'(t) \;\Rightarrow\; y'(t) = 2z'(t)z(t)\,.$$

Die urpsrüngliche Gleichung geht über in

$$2z'z = 2\frac{z^2}{t} + tz$$

oder

$$z' = \frac{z}{t} + \frac{t}{2}$$

mit $z(1) = 1$. Es handelt sich hier um eine lineare DGL. Wir bestimmen zuerst eine Lösung der homogenen DGL mittels Trennung der Variablen und erhalten $z(t) = ct$. Jetzt machen wir den Ansatz $\psi(t) = c(t)t$. Wir erhalten dann folgende Differentialgleichung für $c(t)$:

$$c'(t)t = \frac{t}{2}\,.$$

Somit ist $c(t) = \frac{t}{2}$ eine mögliche Lösung. Für ψ erhalten wir

$$\psi(t) = \frac{t^2}{2}\,.$$

Die Lösung der DGL für z ist gegeben durch

$$z(t) = ct + \frac{t^2}{2}\,.$$

Die Konstante c erhält man aus der Anfangsbedingung $z(1) = 1$, also $c = \frac{1}{2}$. Damit ist die Lösung

$$\begin{aligned} z(t) =& \tfrac{1}{2}(t + t^2) \\ \Rightarrow \quad y(t) =& \tfrac{1}{4}(t + t^2)^2 \quad \forall t > 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe H21 (Existenz und Eindeutigkeit) (1 Punkt)
Für ein AWP $y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0$ lässt sich die Iterationsfolge

$$\phi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s$$

der Picard-Iteration auch dann bilden, wenn $f(t, y)$ nicht lokal Lipschitz-stetig ist. Aber die Hoffnung, dass die Folge (ϕ_n) gegen eine Lösung des AWP konvergiert, kann trügen.

(i) Sei $f(t, y)$ stetig. Zeigen Sie: Wenn (ϕ_n) auf geeignetem kompakten Intervall J gleichmässig gegen ϕ konvergiert, so ist ϕ auf J Lösung der Gleichung $y' = f(t, y)$.

Betrachten Sie nun die auf $R := \{(t, y) : \ |t| \leq 1, |y| \leq 1\}$ definierte Funktion

$$f(t,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0,\ |y| \leq 1, \\ 2t & \text{für } 0 < |t| \leq 1,\ -1 \leq y < 0, \\ 2t - 4\frac{y}{t} & \text{für } 0 < |t| \leq 1,\ 0 \leq y < t^2, \\ -2t & \text{für } 0 < |t| \leq 1,\ t^2 \leq y \leq 1\ . \end{cases}$$

(ii) Zeigen Sie, dass f stetig, aber nicht lokal Lipschitz-stetig ist.

(iii) Stellen Sie für das AWP

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0$$

die Iterationsfolge auf und zeigen Sie, dass sie nicht konvergent ist.
Hinweis: Die Rechnungen sind einfacher, als es auf den ersten Blick scheint.

(iv) Finden Sie gleichmässig konvergente Teilfolgen und zeigen Sie, dass auch diese keine Lösungen der DGL sind.

Aber: Die Existenz mindestens einer Lösung wird durch einen *Existenzsatz von Peano* für stetige Funktionen $f(t, y)$ garantiert!

Lösungshinweise:

i)

$$\begin{aligned} \phi'(t) =& (\lim_{n\to\infty} \phi_n(t))' \stackrel{1.}{=} \lim_{n\to\infty} \phi_n'(t) \\ =& \lim_{n\to\infty} (x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_{n-1}(s))\,ds)' = \lim_{n\to\infty} f(t, \phi_{n-1}(t)) \\ \stackrel{2.}{=}& f(t, \lim_{n\to\infty} \phi_{n-1}(t)) = f(t, \phi(t)) \end{aligned}$$

<u>Zu 1.:</u> Beh.: ϕ_n' konvergiert gleichmäßig. (Dann folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \phi_n' = \phi'$.)
Beweis der Beh.: Es gilt $(\phi_n(t))' = f(t, \phi_{n-1}(t))$. Wir wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ für alle $t \in J$, sodass für alle $n > n_0$ gilt $|\phi_n(t) - \phi_{n_0}(t)| < \delta$ und $|f(t, x) - f(t, y)| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $t, x, y \in J,\ |x - y| < \delta$. Dann gilt für alle $t \in J$

$$|f(t, \phi_n(t)) - f(t, \phi(t))| \leq |f(t, \phi_n(t)) - f(t, \phi_{n_0}(t))| + |f(\phi_{n_0}(t)) - f(t, \phi(t))| \leq \epsilon.$$

Insbesondere konvergiert ϕ_n' auf J gleichmäßig gegen $f(t, \phi(t))$.
<u>Zu 2.:</u> f ist stetig.

ii) Stetigkeit ist klar.
Betrachten wir Umbebungen von $(0,0)$; insbesondere den Bereich $0 \leq y \leq t^2$:

$$|f(t,y) - f(t,0)| = |2t - 4\tfrac{y}{t} - 2t| = |\tfrac{4}{t}|\,|y - 0|$$

$\Rightarrow f$ ist nicht lokal Lipschitz stetig.

iii)

$$\begin{aligned}
&\phi_0(t) = 0 \\
&\phi_1(t) = 0 + \int_0^t f(s, \phi_0(s)) = 0 + \int_0^t 2s\,ds = t^2 \\
&\phi_2(t) = 0 + \int_0^t f(s, \phi_1(s))\,ds = -t^2 \\
&\;\vdots \\
&\phi_{2n-1}(t) = t^2 \\
&\phi_{2n}(t) = -t^2
\end{aligned}$$

iv) Setze $\xi_n = \phi_{2n-1} = t^2$ und $\eta_n = \phi_{2n} = -t^2$. Einsetzen zeigt, dass dies keine Lösungen sind.