Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen
5. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner
Walter Reußwig

Wintersemester 2011/2012
20./21. Dezember 2011

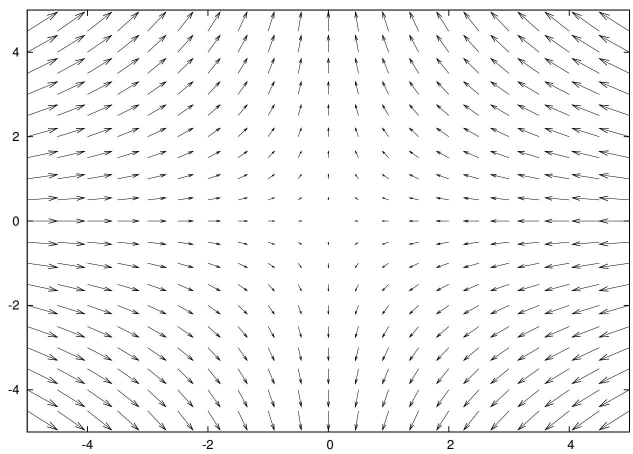
Gruppenübung

Aufgabe G15 (Vektorfeld)
Betrachten Sie folgendes System von linearen Differentialgleichungen

$$y_1' = -y_1, \quad y_2' = 2y_2.$$

Skizzieren Sie das dazugehörige Vektorfeld $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Lösungshinweise:



Aufgabe G16 (Vektorfelder und Richtungsfelder)
Welche Informationen können Sie aus den Vektorfeldern in Abb. 1 – Abb. 5 gewinnen.
Stichworte: Richtungsfeld, lineares System von DGLen, autonome DGL.

Lösungshinweise:

Abb. 1: Es gilt anscheinend für $x, y \in \mathbb{R}^2$, dass $A(x+y) = A(x) + A(y)$ ist.
$\Rightarrow$ System von linearen DGLen. Ein negativer, ein positiver Eigenwert, EV zum negativen EW lautet $x = (1,0)^T$ ($x' = \frac{1}{5}(\frac{1}{2}y - x)$, $y' = \frac{1}{5}y$)

Abb. 2: Vektorfeld, nicht linear, da $A(x+y) = A(x)+A(y)$ nicht für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt; Lösungen entweder periodisch oder "spiralförmig". ($x' = \frac{1}{10}y$, $y' = \frac{1}{10}(y\sin(x) - x)$)

Abb. 3: System von linearen DGLen (Argumentation siehe Fall 1), komplexe Eigenwerte ($x' = -0.15y$, $y' = 0.25x$)

Abb. 4: Könnte Richtungsfeld einer autonomen DGL, da invariant unter Zeittranslation ($x' = \sin(x)$)

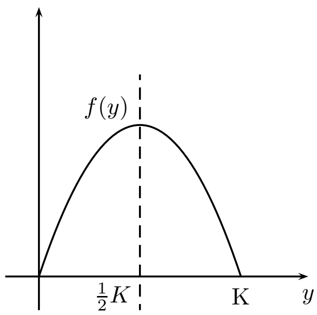
Abb. 5: Könnte Richtungsfeld sein, allerdings nicht autonom, da Lösungen nicht translationsinvariant. Allerdings sind sie invariant unter Ortstranslation, daher DGL von der Form $x'(t) = f(t)$. Lösung ist einfach das (unbestimmte) Integral über f. ($x'(t) = \sin(t)$)

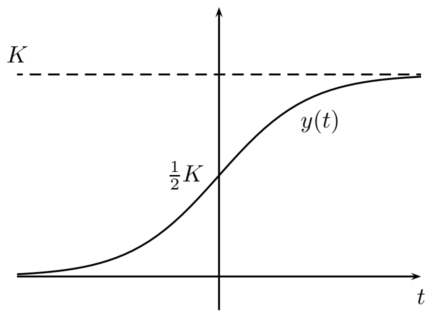
Aufgabe G17 (Symmetrie und logistisches Wachstum)
Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetige Funktionen.

(i) Es gelte
$$f(-t,x) = -f(t,x) \quad \text{für alle } (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$
Zeigen Sie: Ist $r > 0$, so geht jede Lösung $\phi : [-r,r] \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $x' = f(t,x)$ bei Spiegelung an der y-Achse in sich über.

(ii) Es gelte
$$g(-x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$
Zeigen Sie: Ist $r > 0$, so geht jede Lösung $\phi : [-r,r] \to \mathbb{R}$ des AWP $x' = g(x)$, $x(0) = 0$ bei Punktspiegelung an $(t_0, x_0) = (0,0)$ in sich über.

(iii) Für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Konstanten $\alpha, K > 0$ betrachten wir die Gleichung des beschränkten Wachstums
$$y' = f(y) := \alpha\, y\, (K - y).$$
Die „rechte Seite“ f ist symmetrisch zur Achse $y = \frac{1}{2}K$, d.h. $f\left(\frac{1}{2}K + y\right) = f\left(\frac{1}{2}K - y\right)$.
Ein Blick auf den Graphen der Lösung $y(t)$ des AWP $y' = f(y)$, $y(0) = \frac{1}{2}K$ suggeriert, dass $y(t)$ punktsymmetrisch bzgl. $\left(0, \frac{1}{2}K\right)$ ist, d.h. $y(-t) = K - y(t) = \frac{1}{2}K - \left(y(t) - \frac{1}{2}K\right)$.





Verwenden Sie (i) oder (ii), um diese Behauptung über $y(t)$ zu beweisen.

Lösungshinweise:

(i) Es sei $\phi(t) : [-r,r] \to \mathbb{R}$, $r > 0$ eine Lösung der DGL und $\psi : [-r,r] \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$\psi(t) = \phi(-t) \quad \text{für alle } t \in [-r,r].$$
Dann ist auch $\psi(t)$ eine Lösung der DGL, denn
$$\begin{aligned} \psi'(t) &= (\phi(-t))' = -\phi'(-t) = -f(-t, \phi(-t)) \\ &= f(t, \phi(-t)) = f(x, \psi(x)). \end{aligned} \qquad \text{(1 Punkt)}$$
Nach Voraussetzung ist f lokal Lipschitz-stetig. Da $\phi(0) = \psi(0)$, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz $\phi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in [-r,r]$.

(ii) Sei $\phi(t)$ Lösung von $x'(t) = g(x(t))$, $x(0) = 0$ auf $(-r, r)$. Setze $\psi(t) := -\phi(-t)$. Dann ist

$$\psi'(t) = -\phi'(-t) \cdot (-1) = \phi'(-t) = g(\phi(-t)) = g(-\phi(-t)) = g(\psi(t)),$$

also löst $\psi(t)$ das AWP $x'(t) = g(x(t))$, $x(0) = 0$. Da die Lösungen eindeutig sind, folgt $\psi(t) = \phi(t)$.

(iii) Wir setzen $x(t) = y(t) - \frac{1}{2}K$. Dann ist also $y(t) = x(t) + \frac{1}{2}K$ und

$$x'(t) = y'(t) = \alpha\, y(t)\,(K - y(t)) = \alpha\,\left(x(t) + \tfrac{1}{2}K\right)\,\left(K - x(t) - \tfrac{1}{2}K\right)$$
$$\Rightarrow\; x' = \alpha\,\left(\tfrac{1}{2}K + x\right)\,\left(\tfrac{1}{2}K - x\right) = \alpha\,\left(\tfrac{K^2}{4} - x^2\right) =: F(x)$$

Da offensichtlich $F(x) = F(-x)$ gilt, liefert (ii), dass $x(t) = -x(-t)$ ist und damit

$$y(-t) = x(-t) + \tfrac{1}{2}K = -x(t) + \tfrac{1}{2}K = -\left(y(t) - \tfrac{1}{2}K\right) + \tfrac{1}{2}K = K - y(t).$$

Hausübung

Aufgabe H15 (DGL n-ter Ordnung in DGL erster Ordnung überführen) (1 Punkt)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie Satz 2.2 der Vorlesung:
Eine n-fach stetig differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \supseteq J \to \mathbb{R}$ löst das AWP

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= F\left(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right), \\ y(t_0) = \alpha_0, \quad y'(t_0) &= \alpha_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1} \end{aligned} \tag{$*$}$$

genau dann, wenn $x : \mathbb{R} \supseteq J \to \mathbb{R}^n : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ das AWP

$$x'(t) = f(t, x(t)) := \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ F\left(t, x_1(t), \dots, x_n(t)\right) \end{pmatrix}, \qquad x(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \tag{$**$}$$

löst.

(b) Für eine lineare Funktion F der Form

$$F\left(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) = a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}\, y^{(n-2)}(t) + \ldots + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t)$$

mit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ führt dies auf das System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$x'(t) = A\, x(t).$$

Bestimmen Sie für diesen Fall die Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Lösungshinweise:

(a) Sei y eine Lösung von $(*)$ und setzte $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$x'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ F\big(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ F\big(t, x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \end{pmatrix} = f(t, x(t))$$

und $x(t_0) = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$.

Sei umgekehrt x eine Lösung von $(**)$ und setzte $y(t) := x_1(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y'(t) &= x_1'(t) = x_2(t), \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(t) &= x_{n-1}'(t) = x_n(t), \\ y^{(n)}(t) &= x_n'(t) = F\big(t, x_1(t), \dots, x_n(t)\big) = F\big(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\big) \end{aligned}$$

und $y(t_0) = x_1(t_0) = \alpha_0, \ \dots, \ y^{(n-1)}(t_0) = x_n(t_0) = \alpha_{n-1}$.

(b) In diesem Fall erhalten wir

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ F\big(t, x(t)\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ a_{n-1}\, x_n(t) + \ldots + a_0\, x_1(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H16 (Differentialgleichungen für Kurvenscharen) (1 Punkt)

Wir betrachten die Familie der konzentrischen Kreise in $\mathbb{R}^2$, welche für $r > 0$ implizit durch $f(x, y, r) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ gegeben sind.

(i) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, welche die Kreislinien für $-r < x < r$ beschreibt.

(ii) Welche Probleme treten auf, wenn man die gesamte Kreislinie $x^2 + y^2 = r^2$ als Lösung einer Differentialgleichung schreiben will?

(iii) Suchen Sie eine differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass die Kreislinien aus (ii) Niveaulinien von F sind und skizzieren Sie das Vektorfeld $\operatorname{grad} F := (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})^T$.

(iv) Geben Sie eine Parametrisierung $(x(t), y(t))$ einer Niveaulinie von F an und skizzieren Sie deren Tangentialvektoren.

(v) Welche geometrische Beziehung besteht zwischen den Tangentialvektoren (x, y) und dem Vektorfeld $\operatorname{grad} F$?

(vi) Zeigen Sie, dass die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ der Differentialgleichung

$$\left\langle \operatorname{grad} F, \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

genügen. Finden Sie eine Parametrisierung, sodass $x(t) = t$ ist und vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis aus (i). In welchem Sinn kann man hier von einer Äquivalenz der Differentialgleichung aus (i) und (vi) sprechen?

Lösungshinweise:

(i) $\frac{df}{dx} = 2x + 2y'y = 0$. Daraus erhalten wir die DGL

$$y' + \frac{x}{y} = 0. \tag{*}$$

(ii) Funktionen können generell in einem Punkt nicht zwei verschiedene Werte annehmen und für $y = 0$ wird die DGL sinnlos, $y' = \infty$.

Wir erhalten als Lösung also lediglich die Funktionen $y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ für $x \in (-r, r)$.

(iii) $F(x, y) = x^2 + y^2$. Das Vektorfeld $\operatorname{grad} F(x, y) = 2(x, y)^T$ ist ein „Zentralfeld“.

(iv) Parametrisierung $(x(t), y(t)) = r(\cos(t), \sin(t))$. Die Tangentialvektoren sind tangential am Kreis $x^2 + y^2 = r^2$.

(v) Die Tangentialvektoren stehen senkrecht auf dem Vektorfeld ∇F.

(vi) Es gilt $x^2(t) + y^2(t) = r^2$, also $F(x(t), y(t)) = r^2$. Wir leiten nach t ab

$$\Rightarrow \quad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0. \tag{**}$$

Solche Parametrisierungen sind gegeben durch $\left(t, \pm\sqrt{r^2 - t^2}\right)$. Sie entsprechen den Lösungen der DGL aus (i).

Lösungen der beiden DGL sind äquivalent hinsichtlich der Kurvensegmente, die sie beschreiben. Der Graph ist allerdings unterschiedlich.

Aufgabe H17 (Lipschitz Stetigkeit) (1 Punkt)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen bezüglich x lokal oder global Lipschitz-stetig sind:

(i) $f(t, x) = t^2$ (ii) $f(t, x) = x^2$ (iii) $f(t, x) = e^t x$

Lösungshinweise:

(i) $|f(t, x) - f(t, y)| = |t^2 - t^2| = 0 \Rightarrow f$ ist Lipschitz-stetig.

(ii) $|f(t, x) - f(t, y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \Rightarrow f$ ist nur lokal Lipschitz-stetig.

(iii) $|f(t, x) - f(t, y)| = e^t|x - y| \Rightarrow f$ ist nur lokal Lipschitz-stetig.

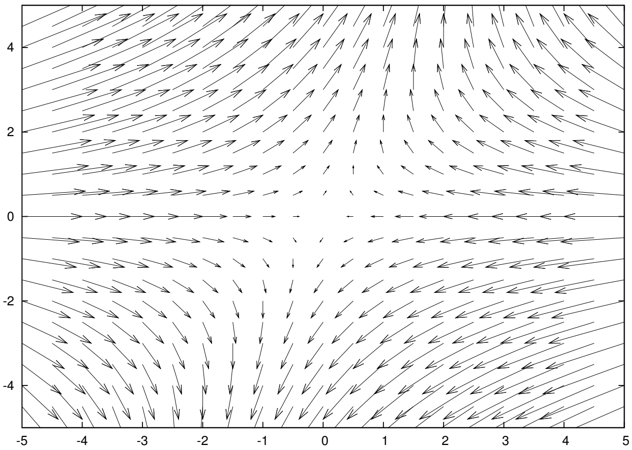


Abbildung 1

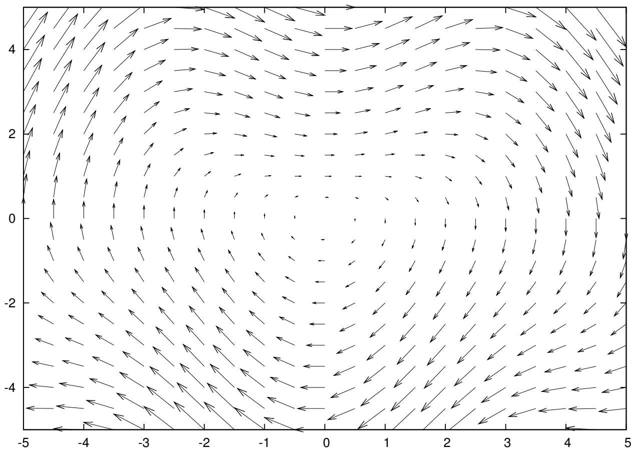


Abbildung 2

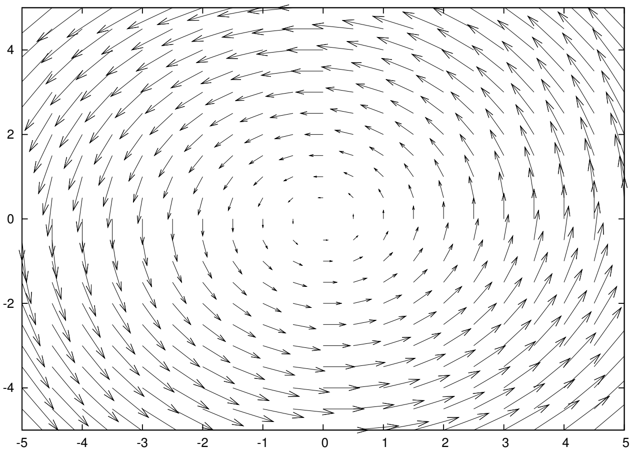


Abbildung 3

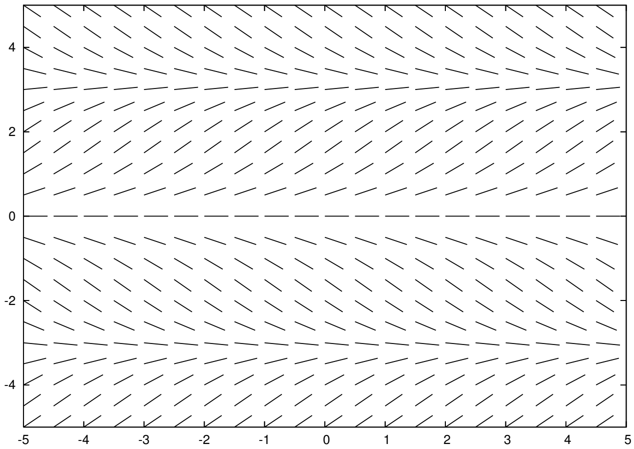


Abbildung 4

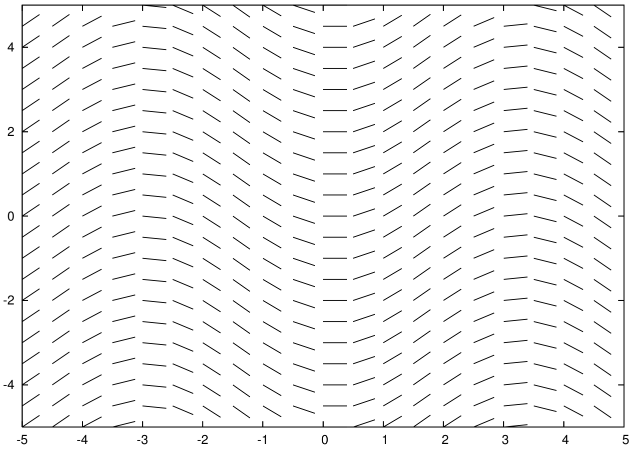


Abbildung 5