Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen
4. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner
Walter Reußwig

Wintersemester 2011/2012
06./07. Dezember 2011

Gruppenübung

Aufgabe G11 (Untermannigfaltigkeit !?)

(i) Machen Sie sich nochmals klar, dass der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ eine 1-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist, indem Sie *jede* der vier äquivalenten Bedingungen aus der Vorlesung direkt zeigen.

(ii) Betrachten Sie die Menge

$$K := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - y^2 = 0\right\}.$$

Welche Punkte in K haben eine offene Umgebung U, so dass $K \cap U$ eine 1-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist? In den Ausnahmepunkten können Sie rein anschaulich argumentieren.

Lösungshinweise:

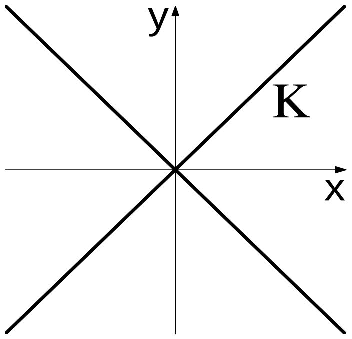
(a) *Karten:* Die Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (x, x^2+y^2-1)$ ist auf den vier offenen Mengen $U_x^\pm := \left\{(x,y \in \mathbb{R}^2 \,:\, \pm x > 0\right\}$ und $U_y^\pm := \left\{(x,y \in \mathbb{R}^2 \,:\, \pm y > 0\right\}$ ein C^1-Diffeomorphismus mit den gewünschten Eigenschaften.

(b) *Parametrisierung:* Die C^1-Funktion $\phi : \mathbb{R} \supseteq [0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ parametrisiert den Einheitskreis und der Rang von $\mathrm{d}\phi(t_0)$ ist 1 für $t_0 \in [0,2\pi[$.

(c) *Niveaumenge:* Das Urbild $f^{-1}(1)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ an der Stelle 1 entspricht dem Einheitskreis und der Rang von $\mathrm{d}f(x_0,y_0)$ ist 1 für $(x_0,y_0) \neq 0$.

(d) *Funktionsgraphen:* Wir betrachten die Funktionen $g_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \pm\sqrt{1-x^2}$ auf dem Intervall $[-1,1]$.

(ii) Bild der Menge K in $\mathbb{R}^2$:



- Alle Paare $(x, y) \in K$ mit $(x, y) \neq (0, 0)$ haben Umgebungen U, in denen $K \cap U$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.
  Betrachte hierzu die Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.
  $\tilde{f}$ ist $\mathcal{C}^1$-Abbildung mit $df(x, y) = (2x, -2y)$, also ist Rang $df(x, y) = 1$ mit $(x, y) \neq (0, 0)$.
  Setze $U := (x - \frac{|x|}{2}, x + \frac{|x|}{2}) \times (y - \frac{|y|}{2}, y + \frac{|y|}{2})$. Für $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ gilt dann: $\tilde{f}^{-1}(0) = K \cap U$.
- In $(0, 0)$ existiert keine Umgebung U, so dass $K \cap U$ eine Untermannigfaltigkeit ist, da dort der Tangentialraum 2-dimensional wäre.

Aufgabe G12 (Tangentialebene)

Sei $\Omega :=]-\pi, \pi[\times]0, \pi[\subseteq \mathbb{R}^2$, $x_0 = (\alpha_0, \beta_0) \in \Omega$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ die folgende Parametrisierung der Kugeloberfläche

$$f(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

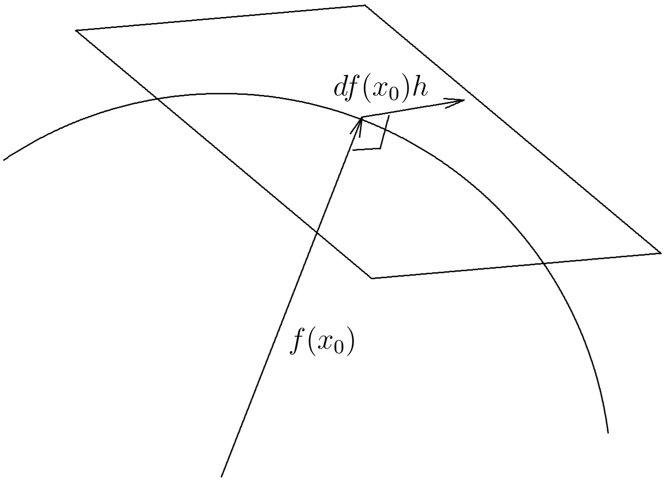
Zeigen Sie, dass durch

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : h \mapsto f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) \cdot h$$

eine Parametrisierung der Tangentialebene an die Kugel im Punkt $f(x_0)$ gegeben ist.

Lösungshinweise:

Zu zeigen: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, h \mapsto f(x_0) + df(x_0)h$ ist eine Parametrisierung der Tangentialebene an die Kugel in $f(x_0) \iff$ i) $f(x_0) \in \text{Bild } T \wedge$ ii)$f(x_0) \perp df(x_0)h$



zu i) $T(0) = f(x_0)$

zu ii) $df(x_0) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_0)\sin(\beta_0) & \sin(\alpha_0)\cos(\beta_0) \\ -\sin(\alpha_0)\sin(\beta_0) & \cos(\alpha_0)\cos(\beta_0) \\ 0 & -\sin(\beta_0) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\langle f(x_0), df(x_0)\cdot h\rangle &= \langle \begin{pmatrix} \sin(\alpha_0)\sin(\beta_0) \\ \cos(\alpha_0)\sin(\beta_0) \\ \cos(\beta_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\alpha_0)\sin(\beta_0) & \sin(\alpha_0)\cos(\beta_0) \\ -\sin(\alpha_0)\sin(\beta_0) & \cos(\alpha_0)\cos(\beta_0) \\ 0 & -\sin(\beta_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\rangle \\
&= \langle \begin{pmatrix} \sin(\alpha_0)\sin(\beta_0) \\ \cos(\alpha_0)\sin(\beta_0) \\ \cos(\beta_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\alpha_0)\sin(\beta_0)\cdot h_1 + \sin(\alpha_0)\cos(\beta_0)\cdot h_2 \\ -\sin(\alpha_0)\sin(\beta_0)\cdot h_1 + \cos(\alpha_0)\cos(\beta_0)\cdot h_2 \\ -\sin(\beta_0)\cdot h_2 \end{pmatrix}\rangle \\
&= \sin(\alpha_0)\cos(\alpha_0)\sin^2(\beta_0)h_1 + \sin^2(\alpha_0)\sin(\beta_0)\cos(\beta_0)h_2 \\
&\quad - \sin(\alpha_0)\cos(\alpha_0)\sin^2(\beta_0)h_1 + \cos^2(\alpha_0)\sin(\beta_0)\cos(\beta_0)h_2 \\
&\quad - \cos(\beta_0)\sin(\beta_0)h_2 \\
&= \underbrace{(\sin^2(\alpha_0) + \cos^2(\alpha_0))}_{=1}\sin(\beta_0)\cos(\beta_0)h_2 - \cos(\beta_0)\sin(\beta_0)h_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

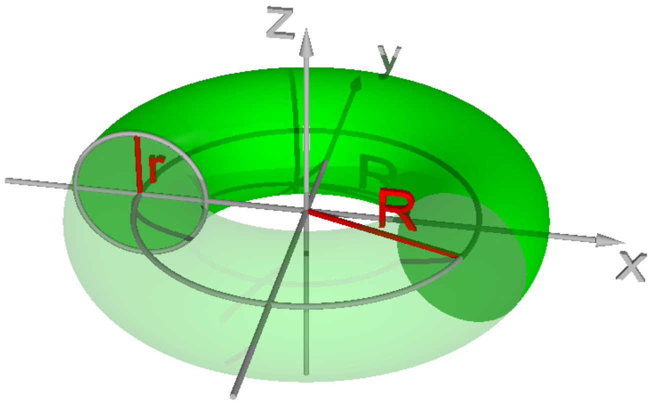
Aufgabe G13 (Torus)

Als Torus im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet man die Oberfläche eines „Schwimmringes“, der z.B. entsteht, wenn man den in der x-z-Ebene liegenden Kreis mit Radius r, Mittelpunkt $(R,0,0)$ und $0 < r < R$ um die z-Achse rotieren lässt.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung dieses Torus im $\mathbb{R}^3$ an.

(b) Zeigen Sie, dass der Torus eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ darstellt.

Lösungshinweise:



(a) Eine Parametrisierung ist gegeben durch:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \supseteq [0,2\pi[\times [0,2\pi[\to \mathbb{R}^3 : (\alpha,\beta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos(\alpha)+R \\ 0 \\ r\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} r\cos(\beta)\cos(\alpha)+R\cos(\beta) \\ r\sin(\beta)\cos(\alpha)+R\sin(\beta) \\ r\sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt:

$$\mathrm{d}\phi(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} [-r\cos(\beta)\sin(\alpha)] & [-r\sin(\beta)\cos(\alpha)-R\sin(\beta)] \\ [-r\sin(\beta)\sin(\alpha)] & [r\cos(\beta)\cos(\alpha)+R\cos(\beta)] \\ [r\cos(\alpha)] & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $\cos(\alpha) \neq 0$ sieht man leicht, dass $\mathrm{Rang}(\mathrm{d}\phi(x_0)) = 2$ sein muss, da $\cos(\beta)$ und $\sin(\beta)$ nicht gleichzeitig verschwinden können. Für $\cos(\alpha) = 0$ ergibt sich die Ableitung

$$\mathrm{d}\phi(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} (\pm r\cos(\beta)) & (-R\sin(\beta)) \\ (\pm r\sin(\beta)) & (+R\cos(\beta)) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

der man auch leicht ansieht, dass sie Rang 2 hat. Es lassen sich also passende offene Mengen finden, so dass ϕ eine Parametrisierung einer 2-dimensionalen differenzierbaren Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe G14 (Untermannigfaltigkeit)
Sei $\mathscr{M}$ die Menge der reellen 2×2-Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

und sei $\mathscr{G} := \{A \in \mathscr{M} : \det(A) = 1\}$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{G}$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathscr{M}$ ist.

Lösungshinweise:

Sei $\mathcal{M} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{G} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R}, \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = 1 \right\}$.

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ beliebig. Zeige, dass es eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ von A gibt, sowie eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, mit den Eigenschaften:

- Rang $df(A) = 1$
- $\mathcal{G} \cap \mathcal{U} = f^{-1}(c)$ für ein $c \in \mathbb{R}$

Setze hierzu: $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = T \mapsto \det T = x \cdot z$.

f ist damit stetig differenzierbar mit $df(A) = \begin{pmatrix} d & 0 & a \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, also Rang $df(A) = 1$.
Setze $\mathcal{U} = \mathcal{M}$, dann ist $\mathcal{U}$ offene Umgebung von A und $f^{-1}(1) = \mathcal{G} \cap \mathcal{U}$.

Hausübung

Aufgabe H12 (Eigenwerte symmetrischer Matrizen) (1 Punkt)
Zeigen Sie, dass eine symmetrische $n \times n$-Matrix A mindestens einen Eigenwert hat, indem Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ auf Maxima und Minima unter der Nebenbedingung $\|x\|_2 = 1$ untersuchen.
Hinweis: Warum ist die Existenz des Maximums und des Minimums gesichert?

Lösungshinweise: Wir suchen die Extrema von

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle Ax, x \rangle$$

unter der Nebenbedingung $x \in S^{n-1}$, d.h. $f(x) := \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i = 1$. Die Extrema existieren wegen der Kompaktheit von S^{n-1}.
Wir wissen, dass h extremal wird, wenn $\nabla h(x) = \lambda \nabla f(x)$ für $x \in S^{n-1}$. Es gilt:

$$\nabla h(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i a_{i1} x_i + \sum_j a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_i a_{in} x_i + \sum_j a_{nj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i a_{1i} x_i + \sum_j a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_i a_{ni} x_i + \sum_j a_{nj} x_j \end{pmatrix} = 2Ax,$$
$$\nabla f(x) = 2x \qquad \text{(setze } A := \mathbb{I} \text{ in obiger Gleichung).}$$

Also erhalten wir:

$$\nabla h(x) = \lambda \nabla f(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2Ax = 2\lambda x \quad \Leftrightarrow \quad Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ ist EW von } A.$$

Aufgabe H13 (Extrema unter Nebenbedingungen) (1 Punkt)
Bestimmen Sie das absolute Minimum und das absolute Maximum der Funktion

$$h(x, y, z) = 5x + y - 3z$$

auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Lösungshinweise: Wir suchen die Extrema der Funktion

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto 5x + y - 3z$$

unter den Nebenbedingungen $f_1(x,y,z) = x + y + z = 0$ und $f_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, die wegen der Kompaktheit von Schnitten von S^2 mit einer Ebene existieren.
Die Funktion h wird extremal in a, wenn $\nabla h(a) = \lambda \nabla f_1(a) + \mu \nabla f_2(a)$. Die Gradienten lauten:

$$\nabla h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \nabla f_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \nabla f_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0, \\ \lambda + 2\mu x &= 5, \\ \lambda + 2\mu y &= 1, \\ \lambda + 2\mu z &= -3. \end{aligned}$$

Lösungen dieses Gleichungssystems sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Da die Menge der lokalen Extrema die globalen Extrema beinhaltet und $h(x_1,y_1,z_1) = 4\sqrt{2}$ und $h(x_2,y_2,z_2) = -4\sqrt{2}$ ist, liegt in (x_1,y_1,z_1) das Maximum und in (x_2,y_2,z_2) das Minimum vor.

Aufgabe H14 (Orthogonale Gruppe) (1 Punkt)
Sei $\mathscr{O}(n) := \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, A^T A = \mathbb{1}\right\}$ die orthogonale Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{O}(n)$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $M_n(\mathbb{R})$ ist.
Betrachten Sie hierfür die Abbildung $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(n) : A \mapsto A^T A$, wobei $\mathscr{S}(n)$ die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen bezeichnet, d.h. $\mathscr{S}(n) := \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, A = A^T\right\}$.
Zeigen Sie als Zwischenschritte insbesondere, dass die Ableitung von f durch
- $\mathrm{d}f(A) : M_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(n) : B \mapsto B^T A + A^T B$ gegeben und
- $\mathrm{d}f(A_0)$ für $A_0 \in \mathscr{O}(n)$ surjektiv ist.

(b) Berechnen Sie die Dimension von $\mathscr{O}(n)$. (*Hinweis:* Welche Dimension hat $\mathscr{S}(n)$?)

(c) Geben Sie den Tangentialraum im Punkt $A_0 = \mathbb{1}$ an. (*Hinweis:* Welche Charakterisierung des Tangentialraums eignet sich hierfür am besten?)

Lösungshinweise:

a) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathcal{S}(n), T \mapsto T^T T$ ist differenzierbar und die Ableitung gegeben durch:

$$g_T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathcal{S}(n), A \mapsto A^T T + T^T A$$

Beweis:
Laut Definition ist $df(T)$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, für die gilt:

$$f(T+H) = f(T) + df(T)(H) + r(T+H)\cdot \|H\|$$

für alle $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei r eine in T stetige Abbildung und $r(T) = 0$ ist. Durch Einsetzen von g_T erhält man:

$$\begin{aligned} f(T+H) - f(T) - g_T(H) &= (T+H)^T(T+H) - T^T T - (H^T T + T^T H) \\ &= (T^T + H^T)(T+H) - T^T T - H^T T - T^T H \\ &= T^T T + H^T T + T^T H + H^T H - T^T T - H^T T - T^T H \\ &= H^T H \end{aligned}$$

Die Funktion r kann also wie folgt definiert werden:

$$r : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathcal{S}(n), A \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\|A-T\|}(A-T)^T(A-T) & \text{, falls } A \neq T \\ 0 & \text{, falls } A = T \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig in T, weil mit der Division des Vektors $(A-T)$ durch seine Norm ein Einheitsvektor entsteht, der (konstant) Länge 1 hat und $(A-T)^T \longrightarrow 0$ für $A \to T$. Außerdem ist g_T für alle T linear, somit ist f differenzierbar und $df(T) = g_T$ wegen der Eindeutigkeit der Ableitung.
Weil df stetig ist, ist f eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung. Um zu zeigen, dass $df(T_0)$ für beliebiges $T_0 \in \mathcal{O}(n)$ maximalen Rang hat, zeige die Surjektivität von $df(T_0)$:
Sei hierzu $S \in \mathcal{S}(n)$. Gesucht: $T \in \mathcal{O}(n)$, so dass $df(T_0)(T) = S$, d.h. $T^T T_0 + T_0^T T \stackrel{!}{=} S$.
Durch Hinsehen errät man: Setze $T := \frac{1}{2} T_0 S$. Dann ist:

$$\begin{aligned} df(T_0)(T) = df(T_0)\left(\frac{1}{2}T_0 S\right) &= \left(\frac{1}{2}S^T T_0^T\right) T_0 + T_0^T\left(\frac{1}{2}T_0 S\right) = \frac{1}{2}\left(S^T \underbrace{(T_0^T T_0)}_{=\mathbb{1}} + \underbrace{(T_0^T T_0)}_{=\mathbb{1}} S\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(S^T + S\right) \underset{S\in\mathcal{S}(n)}{=} \frac{1}{2}\cdot 2S = S. \end{aligned}$$

Weil schließlich $\mathcal{O}(n) = f^{-1}(\mathbb{1})$ gilt, ist nach 1.14 c) $\mathcal{O}(n)$ Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$.

b) Sei $d := \dim \mathcal{O}(n)$. Dann gilt: $\dim \mathcal{S}(n) =$ Rang $df(T_0) = \dim \mathbb{R}^{n\times n} - d$. Es gilt damit:

$$\dim \mathcal{O}(n) = \underbrace{\dim \mathbb{R}^{n\times n}}_{=n^2} - \underbrace{\dim \mathcal{S}(n)}_{=\frac{1}{2}n(n+1)\ \text{(s.u.)}} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

Begründe $\dim \mathcal{S}(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$ durch Abzählen einer einfachen Basis $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Es gibt die n Basisvektoren der Diagonalmatrizen, weitere $(n-1)$ Basisvektoren symmetrischer Matrizen mit Einsen in der ersten Spalte und Zeile, $(n-2)$ Basisvektoren symmetrischer Matrizen mit Einsen in der zweiten Spalte und Zeile usw.
Damit ist $\dim \mathcal{S}(n) = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$.

c) Der Tangentialraum $T_{\mathbb{1}}\mathcal{O}(n)$ ist der Kern von $df(\mathbb{1})$, das heißt:

$$v \in T_{\mathbb{1}}\mathcal{O}(n) \Leftrightarrow df(\mathbb{1})v = 0 \Leftrightarrow v^T \cdot \mathbb{1} + \mathbb{1}^T \cdot v = 0 \Leftrightarrow v^T + v = 0 \Leftrightarrow v^T = -v$$

Somit ist $T_{\mathbb{1}}\mathcal{O}(n) = \{v \in \mathbb{R}^{n\times n} : v^T = -v\}$, also die Menge der schiefsymmetrischen Matrizen.

Im Auftrag der Fachschaft: Informationen zum Mathebau-Adventskalender

Liebe Studis,

Die Weihnachtszeit steht vor der Tür und wie jedes Jahr verwandelt sich der Mathebau zu dieser Zeit in einen Adventskalender, der Süßigkeiten und Überraschungen für euch bereit hält!

An einigen Bürotüren hängen Plakate mit Rätseln, welche eine (Tages)Zahl ergeben. Klopft ihr am richtigen Tag an die richtige Tür, erwarten euch Plätzchen, Lebkuchen und ein freundlicher Professor oder Mitarbeiter. Außerdem könnt ihr Stempel sammeln und an der Verlosung weiterer toller Preise teilnehmen. Mehr Infos gibt es unter *http://www.mathebau.de*.

Weihnachtliche Grüße,
Eure Fachschaft