Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen
3. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner
Walter Reußwig

Wintersemester 2011/2012
22./23. November 2011

Gruppenübung

Aufgabe G8 (Invertierbarkeit)
Sei $\mathbb{1} \in M_n(\mathbb{C})$, C eine komplexe $m \times n$-Matrix und $D \in M_m(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass eine Blockmatrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{n+m}(\mathbb{C})$$

genau dann invertierbar ist, wenn die Matrix D invertierbar ist. Bestimmen Sie ggf. die Inverse.

Lösungshinweise: Durch Entwicklung nach den ersten Zeilen sieht man, dass

$$\det \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det D$$

ist. Die Determinate der Blockmatrix ist also genau dann Null, wenn $\det D = 0$ ist. Es gilt

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{denn}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -D^{-1}C + D^{-1}C & D^{-1}D \end{pmatrix} = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G9 (Implizite Funktionen und Differentialgleichungen)

(a) Die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f(x_0, y_0) = c$ sei in einer (offenen) Umgebung $U \subseteq \Omega$ von (x_0, y_0) lokal nach y auflösbar. Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, deren Lösung $g : \mathbb{R} \supseteq U \to \mathbb{R}$ der durch $f(x, g(x)) = c$ implizit gegebenen Funktion entspricht.

(b) Lösen Sie die Gleichung $x^2 + y^2 = c$ nach y auf und verifizieren Sie, dass die Funktion(en), die Sie erhalten, tatsächlich die in (a) bestimmte zugehörige Differentialgleichung lösen.

Lösungshinweise:

(a) Wir differenzieren beide Seiten der Gleichung $f(x, g(x)) = c$ nach x und erhalten:

$$0 = \nabla f(x, g(x))^T \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x),$$

bzw.

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

Eine Differentialgleichung dieses Typs nennt man auch *exakte Differentialgleichung*.

(b) Lösen wir die Gleichung nach y auf, erhalten wir die Funktionen $y_\pm(x) = \pm\sqrt{c - x^2}$ mit den Ableitungen $y'_\pm(x) = \frac{\pm 1}{2\sqrt{c-x^2}}(-2x) = \frac{\mp x}{\sqrt{c-x^2}}$.
Diese setzen wir in die zugehörige Differentialgleichung $2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0$ ein und erhalten:

$$2x + 2\left(\pm\sqrt{c - x^2}\right) \cdot \frac{\mp x}{\sqrt{c - x^2}} = 2x - 2x = 0.$$

Aufgabe G10
An welchen Stellen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kann man die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

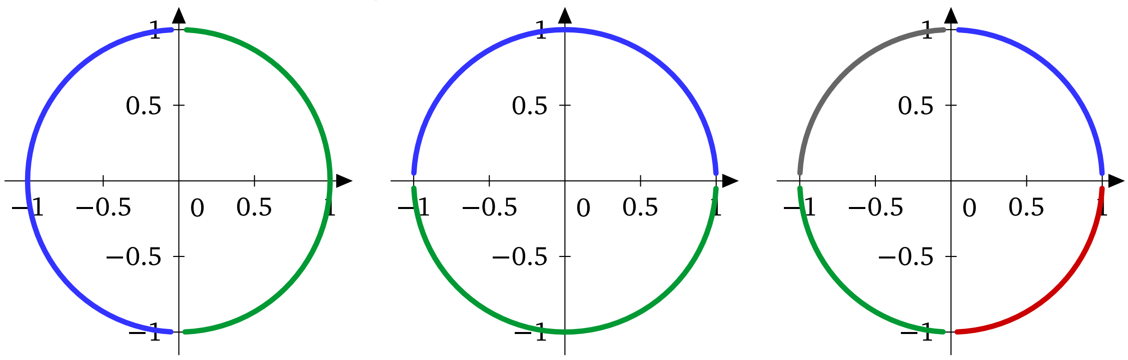
nach x auflösen, an welchen Stellen nach y und an welchen Stellen kann die Gleichung nach beiden Variablen aufgelöst werden?

Lösungshinweise: Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$, um den Satz über implizite Funktionen anwenden zu können.
Dann ist $f(x, y) = 0$ für alle (x, y) auf dem Einheitskreis $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \|(x, y)\|_2^2 = x^2 + y^2 = 1\right\}$.
Außerdem ist

$$\mathrm{d}f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung ist also

- für alle (x, y) auf dem Einheitskreis mit $x \neq 0$ lokal nach x auflösbar (d.h. auf der linken und der rechten Hälfte des Kreises),
- für alle (x, y) auf dem Einheitskreis mit $y \neq 0$ lokal nach y auflösbar (d.h. auf der oberen und der unteren Hälfte des Kreises) und
- für alle (x, y) auf dem Einheitskreis mit $x \neq 0 \neq y$ lokal nach x und y auflösbar (d.h. auf den Viertelkreisen der vier Quadranten).



Hausübung

Aufgabe H8 (Implizite Funktionen) (1 Punkt)

(a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$u + \cos(u \cdot v) = v \cdot x + 1$$
$$\sin(u) = y + v$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, -1, 0, 1)$ nach u und v auflösbar ist.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von u und v an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, -1)$.

Lösungshinweise:

(a) Um den Satz über implizite Funktionen anwenden zu können müssen wir das Problem umformulieren. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u + \cos(u \cdot v) - v \cdot x - 1 \\ \sin(u) - y - v \end{pmatrix},$$

deren Nullstellen mit den Lösungen des gegebenen Gleichungssystems übereinstimmen. An der Stelle $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, -1, 0, 1)$ sind alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt, denn es gilt:

- f ist stetig differenzierbar (f ist zusammengesetzt aus Sinus, Kosinus und Polynomen),
- $f(x_0, y_0, u_0, v_0) = f(0, -1, 0, 1) = 0$,
- $\mathrm{d}f(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} -v & 0 & (1 - \sin(uv) \cdot v) & (-\sin(uv) \cdot u - x) \\ 0 & -1 & \cos(u) & -1 \end{pmatrix}$,

  und $\mathrm{d}_2 f(0, -1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist invertierbar, da $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ ist.

Also gibt es Funktionen $g_u, g_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass die Punkte $(x, y, g_u(x, y), g_v(x, y))$ in einer Umgebung von (x_0, y_0, u_0, v_0) Nullstellen von f und damit Lösungen des gegebenen Gleichungssystems sind.

(b) In Teil (a) haben wir mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen gesehen, dass es eine stetig differenzierbare Funktion $g = (g_u, g_v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, so dass $f(x, y, g_u(x, y), g_v(x, y)) = 0$ ist in einer Umgebung von $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, -1, 0, 1)$. Der Satz gibt aber auch an, wie man die Ableitung von g berechnen kann. Es gilt

$$\mathrm{d}g(x, y) = -\mathrm{d}_2 f(x, y, g_u(x, y), g_v(x, y))^{-1} \cdot \mathrm{d}_1 f(x, y, g_u(x, y), g_v(x, y)).$$

An der Stelle $(x_0, y_0) = (0, -1)$ gilt nun

$$\mathrm{d}_2 f(x_0, y_0, g_u(x_0, y_0), g_v(x_0, y_0))^{-1} = \mathrm{d}_2 f(0, -1, 0, 1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{d}_1 f(x_0, y_0, g_u(x_0, y_0), g_v(x_0, y_0)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}.$$

Damit ist $\quad \mathrm{d}g(x_0, y_0) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot (-\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$

Aufgabe H9 (Untermannigfaltigkeit) (1 Punkt)
Zeigen Sie, dass die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit im Sinne der Definition der Vorlesung ist.

Lösungshinweise: Wir müssen für jeden Punkt a auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2$ eine Karte finden, d.h. eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$ von a und einen C^1-Diffeomorphismus $f : U \to V \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass $f(\mathbb{S}^2 \cap U) = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \cap V$ ist. Dafür gibt es natürlich viele Möglichkeiten.

Ist $a = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ mit $z > 0$, dann kann man zum Beispiel die offene Umgebung $U_z^+ := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z > 0\right\}$ und $f_z(x,y,z) := (x, y, x^2+y^2+z^2-1)$ wählen. Für $z < 0$ ist f_z auch auf $U_z^- := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z < 0\right\}$ ein C^1-Diffeomorphismus auf sein Bild.

Im Fall $z = 0$ kann man f_z nicht mehr nutzen. Dann kann man z. B. $f_y(x,y,z) := (x, z, x^2+y^2+z^2-1)$ auf den offenen Umgebungen $U_y^\pm := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \pm y > 0\right\}$ als Karten heranziehen, wenn $y \neq 0$ ist, bzw. $f_x(x,y,z) := (y, z, x^2+y^2+z^2-1)$ auf den offenen Umgebungen $U_x^\pm := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \pm x > 0\right\}$ im Fall $x \neq 0$.

Geometrisch haben wir hier die Einschränkungen auf die sechs Halbkugeln gewählt, die entstehen, wenn man die Kugel an den Koordinaten-Ebenen schneidet.

Aufgabe H10 (Anwendung des Satzes über implizite Funktionen) (1 Punkt)
Für positive, reelle Konstanten a, b, R betrachten wir die Funktion

$$F : \mathbb{R}^3 \supseteq \Omega \to \mathbb{R} \,:\, (p, v, T) \mapsto \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) - RT.$$

Zeigen Sie durch Anwendung des Satzes über implizite Funktionen, dass im Gebiet

$$D = \left\{(p,v,T) \in \mathbb{R}^3 \,:\, v > b,\ \frac{\partial F}{\partial v}(p,v,T) \neq 0\right\} \subseteq \Omega$$

die Identität

$$\frac{\partial v}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial v} = -1$$

erfüllt ist. (Die Funktion F habe in D eine Nullstelle.)

Bemerkungen: Das Produkt hat also nicht den Wert 1, den man durch "Kürzen" erhalten würde. Interpretiert man p als Druck, v als molares Volumen und T als absolute Temperatur entspricht die Gleichung $F(p,v,T) = 0$ bzw. $p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$ der *Van-der-Waals-Gleichung*, einer angenäherten Zustandsgleichung für reale Gase.

Lösungshinweise: Wir nutzen wieder den Satz über implizite Funktionen und berechnen die Ableitung von F. Diese ist gegeben durch

$$\mathrm{d}F(p,v,T) = \Big((v-b) \quad (-\tfrac{2a}{v^3}(v-b) + \tfrac{a}{v^2} + p) \quad (-R)\Big).$$

Im Gebiet D gilt mit den Voraussetzungen an a, b und R

$$\frac{\partial F}{\partial p} = v - b \gneqq 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} \neq 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial T} = -R \lneqq 0.$$

Der Satz ist also für jede der Koordinaten anwendbar (die übrigen Voraussetzungen sind offensichtlich erfüllt) und wir können $F(p,v,T)=0$ nach p, nach v und nach T auflösen.
Wir bezeichnen die drei implizit gegebenen Funktionen ebenfalls mit p, v, und T, d. h. wir erhalten $p,v,T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, so dass $F(p,v,T(p,v))=F(p,v(p,T),T)=F(p(v,T),v,T)=0$ ist, und bestimmen die uns interessierenden partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}p(v,T) &= -\left(\frac{\partial F}{\partial p}(p(v,T),v,T)\right)^{-1}\cdot \mathrm{d}_{v,T}F(p(v,T),v,T) \quad \text{und damit}\\
\frac{\partial p}{\partial v}(v,T) &= -\frac{1}{v-b}\left(-\frac{2a}{v^3}(v-b)+\frac{a}{v^2}+p\right) \quad \text{sowie analog}\\
\frac{\partial v}{\partial T}(p,T) &= -\frac{1}{-\frac{2a}{v^3}(v-b)+\frac{a}{v^2}+p}(-R) \quad \text{und}\\
\frac{\partial T}{\partial p}(p,v) &= -\frac{1}{-R}(v-b).
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\frac{\partial v}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial v}=\frac{R}{-\frac{2a}{v^3}(v-b)+\frac{a}{v^2}+p}\cdot\frac{v-b}{R}\cdot\frac{-\left(-\frac{2a}{v^3}(v-b)+\frac{a}{v^2}+p\right)}{v-b}=-1.$$

Aufgabe H11 (Zusatzaufgabe zur Thermodynamik) (1 Zusatzpunkt)
Der thermodynamische Zustand eines Gases mit fester Teilchenzahl kann durch die beiden Variablen Temperatur T und Volumen V beschrieben werden. Ein Prozess wird dann durch eine Kurve in der T-V-Ebene $(T,V\geq 0)$ beschrieben; eine Parametrisierung der Prozesskurve π sei in der Gestalt

$$\pi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^2 : T\mapsto (T,V(T))$$

möglich. Ist $S:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}:(T,V)\mapsto S(T,V)$ die Entropiefunktion des Gases, so kann man die spezifische Wärme c_π des Prozesses durch

$$c_\pi(T):=T\cdot(S\circ\pi)'(T)$$

definieren. Die Größe c_π beschreibt die pro Temperaturänderung bewirkte Änderung der Wärmemenge des Gases während des Prozesses π. Im Falle eines idealen Gases mit N Teilchen der Masse m ist

$$S(T,V)=Nk\left(\ln((2\pi mkT)^{\frac{3}{2}})+\ln(\tfrac{V}{N})+\tfrac{5}{2}\right);$$

dabei ist k die Boltzmann-Konstante.

(a) Berechnen Sie c_π für die folgenden Prozesskurven:
  (i) $V(T)=\text{const.}$ (*isochorer Prozess*, ergibt c_v),
  (ii) $V(T)=\frac{NkT}{p}$, $p=\text{const.}$ (*isobarer Prozess*, ergibt c_p).
  Zeigen Sie, dass $c_p-c_v=Nk$ gilt.
(b) Bestimmen Sie diejenigen Kurven, entlang derer $c_\pi(T)\equiv 0$ gilt (die *adiabatischen Prozesse*). Nutzen Sie dazu den Ansatz $V(T)=aT^b$ mit zu berechnenden Konstanten $a,b\in\mathbb{R}$.

Lösungshinweise:

$$S : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\ ,\ (T,V) \mapsto S(T,V)$$

$$\pi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2\ ,\ T \mapsto (\pi_1(T), \pi_2(T))$$

wobei $\pi_1(T) = T\ \ und\ \ \pi_2(T) = V\ \ (= V(T))$ ist

a)
$$\begin{aligned} c_\pi(T) &\overset{\text{Kettenregel}}{=} T \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial T}(T, V(T)), \frac{\partial S}{\partial V}(T, V(T)) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\pi_1}{dT}(T) \\ \frac{d\pi_2}{dT}(T) \end{pmatrix} \\ &= T \cdot \left(\frac{3Nk}{2T}, \frac{Nk}{V(T)} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{dV}{dT}(T) \end{pmatrix} \\ &= Nk \left(\frac{3}{2} + \frac{T \frac{dV}{dT}(T)}{V(T)} \right) \end{aligned}$$

i) $V(T) = const \implies \frac{dV}{dT} \equiv 0$. Also: $c_\pi(T) = \frac{3}{2}Nk =: c_v$

ii) $V(T) = \frac{NkT}{p} \implies \frac{dV}{dT}(T) = \frac{Nk}{p}$. Also: $c_\pi(T) = \frac{5}{2}Nk =: c_p$

Somit ist: $c_p - c_v = \frac{5}{2}Nk - \frac{3}{2}Nk = Nk$

b) Ansatz $V(T) = aT^b$ einsetzen in die c_π-Formel:

$$c_\pi(T) = \frac{3}{2}Nk + bNk \overset{!}{=} 0 \implies b = -\frac{3}{2}\ \ ,\quad a \in \mathbb{R}_+ \quad \text{(da nach Voraussetzung } T, V \geq 0)$$