Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen
2. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner
Walter Reußwig

Wintersemester 2011/2012
08./09. November 2011

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Für lineare Abbildunge ist stetig = beschränkt)
Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume und $T: V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass T genau dann stetig ist, wenn T beschränkt ist.

Lösungshinweise: Sei T stetig. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\|Ty\|_W = \|Ty - T0\|_W \le \varepsilon := 1$ für alle $y \in V$ mit $\|y\|_V = \|y - 0\|_V \le \delta$. Für $0 \ne x \in V$ ist $\|\frac{\delta}{\|x\|_V} x\|_V = \delta$ und damit folgt

$$\|Tx\|_W = \frac{1}{\delta}\|x\|_V \cdot \|T\left(\frac{\delta}{\|x\|_V} x\right)\|_W \le \frac{1}{\delta}\|x\|_V.$$

Wenn T beschränkt ist, existiert eine konstante $C > 0$, so dass für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \le C\|x - y\|.$$

Also ist T Lipschitz-stetig und damit auch stetig.

Aufgabe G5 (Lineare Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$ sind beschränkt)
Zeigen Sie, dass für jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ gilt: Jede lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und damit stetig.

Lösungshinweise: Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ und $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\|Tx\| = \|T\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)\| = \|\sum_{i=1}^n x_i Te_i\| \le \sum_{i=1}^n \left|x_i\right| \|Te_i\| \le M \sum_{i=1}^n \left|x_i\right|,$$

wobei $M := \max\{\|Te_i\| : 1 \le i \le n\}$ ist. Da $\sum_{i=1}^n \left|x_i\right| = \|x\|_1$ die Eins-Norm von x ist und alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind (vgl. Analysis II, 6. Übung) gibt es ein $C > 0$, so dass gilt:

$$\|Tx\| \le M \sum_{i=1}^n \left|x_i\right| = M\|x\|_1 \le MC\|x\|.$$

Also ist T beschränkt und damit nach Aufgabe G4 auch stetig.

Aufgabe G6 (Stetige Koordinatenfunktionen)
Für $1 \le i, j \le n$ seien die Funktionen $f_{ij} : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion $F : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to M_n(\mathbb{R}) : x \mapsto \left(f_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^n$ stetig ist.

Bemerkung: Insbesondere folgt damit aus der Stetigkeit aller partiellen Ableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auch die Stetigkeit von $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$.

Lösungshinweise: Auf $M_n(\mathbb{R})$ definieren wir für $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{R})$ die Maximums-Norm durch $\|A\|_{\max} := \max\left\{\left|a_{ij}\right| \,:\, 1 \leq i, j \leq n\right\}$. Da $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ist und auf $\mathbb{R}^{n^2}$ alle Normen äquivalent sind, gibt es ein $c > 0$, so dass $\|A\|_{\text{op}} \leq c\,\|A\|_{\max}$ ist für alle $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann können wir ein $\delta > 0$ wählen, so dass für alle $1 \leq i, j \leq n$ und alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| < \delta$ folgt, dass $\left|f_{ij}(x) - f_{ij}(y)\right| < \frac{\varepsilon}{c}$ ist. Schließlich folgt aus

$$\|F(x) - F(y)\|_{\text{op}} \leq c\,\|F(x) - F(y)\|_{\max} < c\,\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon,$$

dass F stetig in x ist.

Aufgabe G7 (Exponentialmatrix)
Für $A \in M_n(\mathbb{C})$ definieren wir die Spur von $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ als die Summe der Diagonalelemente von A, d.h.

$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}\ .$$

(i) Wenn Sie das nicht bereits in der linearen Algebra getan haben, dann zeigen Sie, dass für alle $A_1, \ldots, A_m \in M_n$ gilt:

$$\operatorname{tr}(A_1 \cdot A_2 \cdots A_m) = \operatorname{tr}(A_m \cdot A_1 \cdots A_{m-1}).$$

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $A \in M_n(\mathbb{C})$ gilt:

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr}(A)}.$$

Lösungshinweise:

(i) Es genügt die Behauptung für $m = 2$ zu zeigen. Sei $A_1 = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ und $A_2 = (b_{ij})_{i,j=1}^n$, dann gilt:

$$\operatorname{tr}(A_1 \cdot A_2) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{j_i}\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} b_{j_i}\right) = \operatorname{tr}(A_2 \cdot A_1).$$

(ii) Für jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ existiert eine invertierbare Matrix $S \in M_n(\mathbb{C})$, so dass SAS^{-1} eine Jordanmatix mit Diagonalelementen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ist. Dann gilt:

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(S^{-1}SA) = \operatorname{tr}(SAS^{-1}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j,$$
$$\det e^A = \det(S^{-1} e^{SAS^{-1}} S) = \det S^{-1} \cdot \det e^{SAS^{-1}} \cdot \det S = \det e^{SAS^{-1}} = \prod_{j=1}^n e^{\lambda_j}.$$

Insgesamt ergibt sich also $e^{\operatorname{tr}(A)} = e^{\sum_j \lambda_j} = \prod_j e^{\lambda_j} = \det e^A$.

Hausübung

Aufgabe H5 (Inversenbildung stetig) (1 Punkt)
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) Die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist offen in $M_n(\mathbb{C})$.

(b) Die Inversenbildung $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : A \mapsto A^{-1}$ ist stetig bzgl. der Operatornorm.

Hinweise: Sie können die Aussagen aus Aufgabe H1 über die geometrische Reihe (nach Carl Neumann (*1832, †1925) auch *Neumann Reihe* genannt) nutzen. Welche Bedingung garantiert für $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $B \in M_n(\mathbb{C})$ die Invertierbarkeit von $A^{-1}B$?
Nutzen Sie für (b) zunächst die Identität $S^n - T^n = \sum_{k=0}^{n-1} S^{n-1-k}(S-T)T^k$ um zu zeigen, dass $T \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ auf $K_q(0)$, $q < 1$, stetig ist.

Lösungshinweise:

(a) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, dann ist zu zeigen, dass es eine offene Kugel $K_r(A)$ mit Radius $r > 0$ um A gibt, die in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ enthalten ist.
Sei $T := \mathbb{1} - A^{-1}B$. Dann ist $(\mathbb{1} - T) = \mathbb{1} - (\mathbb{1} - A^{-1}B) = A^{-1}B$ invertierbar, falls $\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ ist, denn dann gilt

$$\|T\| = \|\mathbb{1} - A^{-1}B\| = \|A^{-1}A - A^{-1}B\| \leq \|A^1\| \cdot \|A - B\| < 1.$$

Mit A und $A^{-1}B$ ist natürlich auch $A(A^{-1}B) = B$ invertierbar. Für $r := \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ ist also $K_r(A) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

(b) Mit dem Hinweis gilt für $S, T \in K_q(0) \subseteq M_n(\mathbb{C})$

$$\|S^n - T^n\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|S\|^{n-1-k} \cdot \|S - T\| \cdot \|T\|^k \leq n \cdot q^{n-1} \cdot \|S - T\|.$$

Also ist

$$\|\sum_{n=0}^{N} S^n - \sum_{n=0}^{N} T^n\| = \|\sum_{n=0}^{N} S^n - T^n\| \leq \sum_{n=0}^{N} \|S^n - T^n\| \leq \|S - T\| \sum_{n=0}^{N} n \cdot q^{n-1}$$

und da $\sum_{n=0}^{N} n \cdot q^{n-1}$ für $N \to \infty$ konvergiert, folgt die Stetigkeit von $T \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.
Da $B^{-1} = (A^{-1}B)^{-1}A^{-1} = (\mathbb{1} - T)^{-1}A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{1} - A^{-1}B)^n A^{-1}$ ist, erhält man die Abbildung $B \mapsto B^{-1}$ als Komposition der stetigen Abbildungen $B \mapsto \mathbb{1} - A^{-1}B$, $S \mapsto SA^{-1}$ (beide offensichtlich Lipschitz-stetig) und $T \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.
Die Inversenbildung ist also stetig in A und da $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ beliebig war auch auf $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Aufgabe H6 (Satz über die Umkehrfunktion) (1 Punkt)

(a) Führen Sie die ersten drei Beweisschritte des Satzes über die Umkehrfunktion in $\mathbb{R}^n$ für den Fall der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ in $x_0 = 0$ durch, dabei wird vieles einfacher.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) und der Iteration des Banachschen Fixpunktsatzes näherungsweise $\arcsin(0.5)$, bis Sie eine Genauigkeit von drei Nachkommastellen erreicht haben.

Lösungshinweise:

(a) Für $f(x) = \sin(x)$ ist $f(x_0) = \sin(0) = 0$ und $f'(x_0) = \cos(0) = 1$. Wir benötigen also keine Transformation und können direkt $g(x) := x - \sin(x)$ setzen.

Aus $g'(x) = 1 - \cos(x)$ folgt, dass g kontrahierend auf $\overline{K_r(0)}$ ist, falls $|1 - \cos(x)| < \frac{1}{2}$ gilt, also z.B. falls $\cos(x) > \frac{1}{2}$ bzw. $r < 1.047$ ist.

Mit dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es für $y \in \overline{K_{\frac{r}{2}}(0)}$ genau ein $x \in \overline{K_r(0)}$, so dass $g_y(x) := y + g(x)$ oder äquivalent dazu $f(x) = y$ ist, denn es gilt

$$\left|g_y(x)\right| \leq \left|y\right| + \left|g(x)\right| \leq \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \cdot |x - 0| \leq r \qquad \left(\text{und damit } g_y\left(\overline{K_r(0)}\right) \subseteq \overline{K_r(0)}\right),$$
$$\left|g_y(x_1) - g_y(x_2)\right| = \left|g(x_1) - g(x_2)\right| \leq \tfrac{1}{2}\left|x_1 - x_2\right|, \qquad x, x_1, x_2 \in \overline{K_r(0)}.$$

Wie im allgemeinen Beweis kann man nun U, V finden, so dass $f : U \to V$ ein Homöomorphismus und sogar ein Diffeomorphismus ist. Außerdem gilt $(f^{-1})'(t) = f'(f^{-1}(t))^{-1}$.

(b) Wir möchten den Funktionswert der Umkehrfunktion von $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $y = 0.5$ näherungsweise berechnen. Da $y \in \overline{K_{\frac{r}{2}}(0)}$ ist und damit g_y auf $\overline{K_r(0)}$ alle Voraussetzungen für die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, können wir die Fixpunkt-Iteration mit Startwert $y_0 = 0$ durchführen:

$$\begin{aligned}
y_0 = 0 \quad &\rightsquigarrow \quad y_1 = g_y(y_0) = y + y_0 - f(y_0) = y = 0.5 \\
&\rightsquigarrow \quad y_2 = g_y(y_1) = 0.5 + 0.5 - \sin(0.5) \approx 0.520574 \\
&\rightsquigarrow \quad y_3 = g_y(y_2) \approx 0.5 + 0.520574 - \sin(0.520574) \approx \underline{0.523}196 \\
&\rightsquigarrow \quad y_4 = g_y(y_3) \approx 0.5 + 0.523196 - \sin(0.523196) \approx \underline{0.523}545
\end{aligned}$$

Ein auf drei Nachkommastellen genauer Näherungswert für $\arcsin(0.5)$ ist also gegeben durch $y_4 \approx 0.524$.

Aufgabe H7 (Anwendung des Satzes über die Umkehrfunktion) (1 Punkt)

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Sei $a = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ so gewählt, dass das Polynom

$$p_a(t) = t^3 - a_2 t^2 + a_1 t - a_0$$

drei verschiedene reelle Nullstellen hat. Dann sind auch die Nullstellen des Polynoms $p_{\tilde{a}}$ mit Koeffizienten $\tilde{a} = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ aus einer Umgebung von a verschieden und die Nullstellen hängen stetig differenzierbar von den Koeffizienten ab.

Was können Sie aussagen, wenn zwei oder drei Nullstellen gleich sind?

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion, die die Nullstellen auf die Koeffizienten abbildet, und zerlegen Sie p_a in Linearfaktoren.

Lösungshinweise: Das Polynom p_a habe die 3 verschiedenen reellen Nullstellen x_1, x_2, x_3, dann gilt

$$\begin{aligned}
p_a(t) &= t^3 - a_2 t^2 + a_1 t - a_0 = (t - x_1)(t - x_2)(t - x_3) \\
&= t^3 - (x_1 + x_2 + x_3)t^2 + (x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2)t - (x_1 x_2 x_3).
\end{aligned}$$

Betrachten wir also

$$f := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}.$$

Dann beschreibt f die Abhängigkeit der Koeffizienten von den Nullstellen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 + x_3 & x_1 + x_3 & x_1 + x_2 \\ x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \end{pmatrix} \\ \det\left(\mathrm{d}f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 + x_3 & x_1 - x_2 & x_1 - x_3 \\ x_2 x_3 & (x_1 - x_2)x_3 & (x_1 - x_3)x_2 \end{vmatrix} \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)x_2 - (x_1 - x_3)(x_1 - x_2)x_3 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \neq 0 \quad \text{für 3 verschiedene Nullstellen!} \end{aligned}$$

Also folgt mit dem Satz über die Umkehrfunktion die Behauptung.

Falls 2 oder 3 Nullstellen übereinstimmen, lässt sich der Satz über die Umkehrfunktion nicht mehr anwenden. In diesem Fall können wir also nichts aussagen.