# Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen
# 1. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Burkhard Kümmerer**
Andreas Gärtner
Walter Reußwig

**Wintersemester 2011/2012**
**25./26. Oktober 2011**

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Operatornorm)
Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ und $(X, \|\cdot\|_X)$ normierte Vektorräume und $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist die *Operatornorm* von $T$ gegeben durch

$$\|T\|_{\text{op}} := \sup\left\{\|Tx\|_W \;:\; x \in V,\; \|x\|_V \leq 1\right\}.$$

Die Menge der beschränkten linearen Operatoren von $V$ nach $W$ bezeichnen wir mit

$$\mathscr{B}(V,W) := \left\{T : V \to W \;\text{ linear, }\; \|T\|_{\text{op}} < \infty\right\}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) Die Dreiecksungleichung $\|S+T\|_{\text{op}} \leq \|S\|_{\text{op}} + \|T\|_{\text{op}}$ ist für alle $S, T \in \mathscr{B}(V,W)$ gültig.

(ii) Die Operatornorm ist submultiplikativ, d.h. $\|ST\|_{\text{op}} \leq \|S\|_{\text{op}} \cdot \|T\|_{\text{op}}$ gilt für alle $T \in \mathscr{B}(V,W)$ und $S \in \mathscr{B}(W,X)$.

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $T \in \mathscr{B}(V,V)$ gilt $\|T^n\|_{\text{op}} \leq \|T\|_{\text{op}}^n$.

**Lösungshinweise:**

(i)
$$\begin{aligned}\|S+T\|_{\text{op}} &= \sup\left\{\|Sx+Tx\|_W \;:\; x \in V,\; \|x\|_V \leq 1\right\}\\ &\leq \sup\left\{\|Sx\|_W + \|Tx\|_W \;:\; x \in V,\; \|x\|_V \leq 1\right\}\\ &\leq \sup\left\{\|Sx\|_W \;:\; x \in V,\; \|x\|_V \leq 1\right\} + \sup\left\{\|Tx\|_W \;:\; x \in V,\; \|x\|_V \leq 1\right\}\\ &= \|S\|_{\text{op}} + \|T\|_{\text{op}}.\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\|ST\|_{\text{op}} &= \sup\left\{\|STx\|_X \;:\; x \in V,\; \|x\|_V \leq 1\right\}\\ &\leq \sup\left\{\|S\|_{\text{op}} \cdot \|Tx\|_W \;:\; x \in V,\; \|x\|_V \leq 1\right\}\\ &= \|S\|_{\text{op}} \cdot \sup\left\{\|Tx\|_W \;:\; x \in V,\; \|x\|_V \leq 1\right\}\\ &= \|S\|_{\text{op}} \cdot \|T\|_{\text{op}}.\end{aligned}$$

(iii) Folgt sofort (per Induktion) aus (ii).

**Aufgabe G2** (Operatornormen berechnen)
Geben Sie zu den folgenden linearen Abbildungen jeweils die Operatornorm bzgl. der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$ an und beweisen Sie Ihre Behauptungen.

(a) $A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad A_2 := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) $L_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle x, y \rangle$.

**Lösungshinweise:**

(a) Aus $A_1 \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} y \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ folgt, dass $\|A_1\|_{\mathrm{op}} \leq 1$ ist. Andererseits ist $A_1 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und damit $\|A_1\|_{\mathrm{op}} \geq 1$.

Sei $m := \max\{|a|, |b|\}$, dann gilt

$$\|A_2 \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\| = \|\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\| = \|\left(\begin{smallmatrix} ax \\ by \end{smallmatrix}\right)\| = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} \leq m \cdot \sqrt{x^2+y^2} = m \cdot \|\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\|.$$

Also ist $\|A_2\|_{\mathrm{op}} \leq m$. Andererseits ist $A_2 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = |a|$ und $A_2 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = |b|$ und damit $\|A_2\|_{\mathrm{op}} \geq m = \max\{|a|, |b|\}$.

(b) Für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \leq 1$ ist $\left|L_y(x)\right| = \left|\langle x, y\rangle\right| \overset{\text{C.S.}}{\leq} \|x\| \cdot \|y\| \leq \|y\|$. Außerdem gilt $\|\frac{y}{\|y\|}\| = 1$ und $\left|L_y\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right| = \left|\langle \frac{y}{\|y\|}, y\rangle\right| = \frac{1}{\|y\|}\|y\|^2 = \|y\|$. Also ist $\|L_y\|_{\mathrm{op}} = \|y\|$.

**Aufgabe G3** (Exponentialmatrix)
Sei $V$ ein Banachraum (Erinnerung: Das ist ein vollständiger normierter Raum). Für eine lineare Abbildung $T : V \to V$ definieren wir

$$e^T := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

(i) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $e^A$.

(ii) Sei $D \in M_n(\mathbb{C})$ eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $d_1, \dots, d_n$. Zeigen Sie, dass $e^D$ wiederum eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $e^{d_1}, \dots, e^{d_n}$ ist.

(iii) Seien $A, S \in M_n(\mathbb{C})$ und sei $S$ invertierbar. Zeigen Sie, dass dann $Se^AS^{-1} = e^{SAS^{-1}}$ gilt.

**Lösungshinweise:**

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A$, $A^4 = -A^2$, $A^5 = A$.

Also $A^{2k+1} = (-1)^k A$ und $A^{2k} = (-1)^k\, \mathbb{1}$. Daraus folgt

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, \mathbb{1}}{(2k)!} + \frac{(-1)^k A}{(2k+1)!}$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} \cos(1)\, \mathbb{1} + \sin(1) A = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}.$$

(ii) Sei $D$ eine Diagonalmatrix. Dann ist $D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^k \end{pmatrix}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\begin{pmatrix} d_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^k \end{pmatrix}}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{d_1^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^n \frac{d_n^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

Durch Limesbildung folgt die Behauptung.

(iii) Sei $S$ invertierbar.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(SAS^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{SA\overbrace{S^{-1}S}^{\mathbb{I}}AS^{-1}\cdots SA\overbrace{S^{-1}S}^{\mathbb{I}}AS^{-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{SA^kS^{-1}}{k!} = S\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}S^{-1} = Se^AS^{-1}.$$

Durch Limesbildung folgt die Behauptung.

## Hausübung

**Aufgabe H1** (Geometrische Reihe) (1 Punkt)

Sei $V$ ein Banachraum und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass für $\|T\|_{\mathrm{op}} < 1$ gilt:

$$(\mathbb{I} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge ist und anschließend die Behauptung über den Grenzwert.

**Lösungshinweise:** Sei oBdA $m < n$ und setzte $q := \|T\|_{\mathrm{op}} < 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\|\sum_{k=0}^{n} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^k\|_{\mathrm{op}} = \|\sum_{k=m+1}^{n} T^k\|_{\mathrm{op}} &\le \sum_{k=m+1}^{n} \|T^k\|_{\mathrm{op}} \\ &\le \sum_{k=m+1}^{n} \|T\|_{\mathrm{op}}^k = \sum_{k=m+1}^{n} q^k\end{aligned}$$

Also lassen sich die Normen der Differenzen der Partialsummen durch Differenzen der Partialsummen der geometrischen Reihe abschätzen. Damit ist die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge und konvergent.

Dass $(\mathbb{I} - T)\sum_{k=0}^{\infty} T^k = \mathbb{I} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k(\mathbb{I} - T)$ ist, sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned}(\mathbb{I} - T)\sum_{k=0}^{n} T^k &= \sum_{k=0}^{n} T^k - T\sum_{k=0}^{n} T^k = \sum_{k=0}^{n} T^k - \sum_{k=0}^{n} T^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} T^k - \sum_{k=1}^{n+1} T^k = \mathbb{I} - T^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{I},\end{aligned}$$

da aus $\|T\|_{\mathrm{op}} < 1$ folgt, dass $\|T^n\|_{\mathrm{op}} \le \|T\|_{\mathrm{op}}^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

**Aufgabe H2** (Banachscher Fixpunktsatz in Banachräumen) (1 Punkt)
Sei $V$ ein Banachraum und $M \subseteq V$ eine abgeschlossene Teilmenge. Ferner sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ eine Folge in $M$. Zeigen Sie:

(a) Existiert ein $C > 0$ und ein $0 < q < 1$, so dass $\|x_{k+1} - x_k\| \leq C \cdot q^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Existiert ein $0 < q < 1$, so dass $\|x_{k+1} - x_k\| \leq q \cdot \|x_k - x_{k-1}\|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweisen Sie nun mit diesen Resultaten den *Banachschen Fixpunktsatz*:

(c) Sei $f : V \to V$ eine Abbildung, die $M$ invariant lässt (d.h. $f(M) \subseteq M$), und $0 < q < 1$. Ferner erfülle $f$ für alle $x, y \in M$ die Kontraktionsbedingung

$$\|f(x) - f(y)\| \leq q \cdot \|x - y\|.$$

Dann gilt

(i) $f$ besitzt genau einen Fixpunkt $x_0 \in M$, d.h. $f(x_0) = x_0$.

(ii) Für jedes $y_0 \in M$ konvergiert die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_{n+1} := f(y_n)$ gegen $x_0$.

*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst, dass $x_0 := \lim_{n\to\infty} y_n$ existiert. Zeigen Sie anschließend mit Hilfe der Kontraktionsbedingung, dass $x_0$ ein Fixpunkt von $f$ ist, sowie dessen Eindeutigkeit.

Der Banachsche Fixpunktsatz kann auch für Kontraktionen auf vollständigen metrischen Räumen formuliert und bewiesen werden, wie wir bereits in Analysis I, 12. Übung, gesehen haben.

**Lösungshinweise:**

(a) zz.: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge. Betrachten Sie hierzu $\|x_m - x_n\|$, oBdA $m \leq n$:

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &= \|x_m - x_{m+1} + x_{m+1} - x_{m+2} + \ldots + x_{n-1} - x_n\| \\
&\leq \|x_m - x_{m+1}\| + \|x_{m+1} - x_{m+2}\| + \ldots + \|x_{n-1} - x_n\| \\
&\leq C \cdot q^m + C \cdot q^{m+1} + \ldots + C \cdot q^{n-1} \\
&\leq C \sum_{k=m}^{n-1} q^k = C \left( \sum_{k=0}^{n-1} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} q^k \right).
\end{aligned}$$

Da $\left(\sum_{k=0}^{n-1} q^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist (geometrische Reihe!), konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Aus $\|x_{k+1} - x_k\| \leq q \cdot \|x_k - x_{k-1}\|$ folgt offensichtlich, dass $\|x_{k+1} - x_k\| \leq q^k \cdot \|x_1 - x_0\|$ ist. Also folgt die Behauptung mit $C := \|x_1 - x_0\|$ aus Teil (a).

(c) Sei $y_0 \in M$ beliebig. zz.: Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_{n+1} := f(y_n)$ konvergiert. Es gilt

$$\|y_{n+1} - y_n\| = \|f(y_n) - f(y_{n-1})\| \leq q \cdot \|y_n - y_{n-1}\|.$$

Also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Teil (b) konvergent und wir setzten $x_0 := \lim_{n\to\infty} y_n$. Da $M$ abgeschlossen ist, liegt $x_0$ in $M$.
Außerdem ist $x_0$ ein Fixpunkt von $f$, denn:

$$\begin{aligned}
\|f(x_0) - x_0\| &= \|f(x_0) - f(y_n) + f(y_n) - x_0\| = \|f(x_0) - f(y_n) + y_{n+1} - x_0\| \\
&\leq \|f(x_0) - f(y_n)\| + \|y_{n+1} - x_0\| \leq q \cdot \|x_0 - y_n\| + \|y_{n+1} - x_0\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Sei $x_1 \in M$ ein (weiterer) Fixpunkt von $f$. Dann gilt:

$$\|x_0 - x_1\| = \|f(x_0) - f(x_1)\| \leq q \cdot \|x_0 - x_1\|.$$

Wegen $0 < q < 1$ ist die Ungleichung nur dann erfüllt, wenn $\|x_0 - x_1\| = 0$ und damit $x_0 = x_1$ ist. Also ist $x_0$ eindeutig.

**Aufgabe H3** (Einfache Anwendungen des Banachschen Fixpunktsatzes) (1 Punkt)

(a) Finden Sie eine affine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so dass ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ genau dann das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ($A \in M_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$) löst, wenn $g(x_0) = x_0$ gilt.
Formulieren Sie eine Bedingung an die Matrix $A$, die es erlaubt den Banachschen Fixpunktsatz zu nutzen, um die Existenz einer eindeutigen Lösung zu garantieren.

(b) Sei $T \in M_n(\mathbb{R})$ und $A := \mathbb{I} - T$. Dann wird die in (a) gesuchte Bedingung für eine geeignete Wahl der affinen Funktion $g$ zu $\|T\|_{\text{op}} < 1$.
Bestimmen Sie in diesem Fall für den Startwert $y_0 = 0$ die ersten fünf Folgenglieder der Fixpunkt-Iteration aus Aufgabe H2(c). Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Aufgabe H1.

**Lösungshinweise:**

(a) Wir setzen $g(x) := x - Ax + b$, dann ist

$$g(x) = x \iff x - Ax + b = x \iff -Ax + b = 0 \iff Ax = b.$$

Weiter gilt für $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\|g(x) - g(y)\| &= \|x - Ax + b - (y - Ay + b)\| \\
&= \|x - y - A(x - y)\| = \|(\mathbb{I} - A)(x - y)\| \\
&\leq \|\mathbb{I} - A\|_{\text{op}} \|x - y\|.
\end{aligned}$$

Für $\|\mathbb{I} - A\|_{\text{op}} < 1$ können wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden, der uns in diesem Fall die Existenz eines eindeutigen Fixpunkts von $g$ und damit einer Lösung von $Ax = b$ sichert. [ Falls $g(x) := x + \lambda(Ax - b)$ gewählt wurde, erhält man analog die Bedingung $\|\mathbb{I} + \lambda A\|_{\text{op}} < 1$. ]

(b) Für $A = \mathbb{I} - T$ muss die Bedingung $\|\mathbb{I} - A\|_{\text{op}} = \|\mathbb{I} - (\mathbb{I} - T)\|_{\text{op}} = \|T\|_{\text{op}} < 1$ erfüllt sein, um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können. In diesem Fall ist

$$g(x) = x - Ax + b = x - (\mathbb{I} - T)x + b = Tx + b$$

und für jedes $y_0 \in \mathbb{R}^n$ konvergiert Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_{n+1} := g(y_n)$ gegen eine Lösung des Gleichungssystem $(\mathbb{I} - T)x = b$. Für $y_0 = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
y_0 &= 0, \\
y_1 &= g(y_0) = T(0) + b = b, \\
y_2 &= g(y_1) = T(b) + b, \\
y_3 &= g(y_2) = T(T(b) + b) + b = T^2(b) + T(b) + b, \\
&\;\;\vdots \\
y_n &= \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} T^k(b).
\end{aligned}$$

Für $x_0 := \lim_{n\to\infty} y_n = \sum_{k=0}^{\infty} T^k(b)$ gilt also $(\mathbb{I} - T)x_0 = b$ oder anders ausgedrückt

$$(\mathbb{I} - T)^{-1} b = x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} T^k(b).$$

Da $b \in \mathbb{R}^n$ beliebig war, haben wir die Aussage von Aufgabe H1 (für $V = M_n(\mathbb{R})$) mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes bewiesen.

**Aufgabe H4** (Funktionalgleichung) (1 Punkt)

Sei $V$ ein Banachraum und $S, T : V \to V$ lineare Abbildungen.

(a) Sei $ST = TS$. Nehmen Sie an, dass frühere Resultate über das Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen auch auf Banachräumen gültig sind, um zu zeigen, dass

$$e^S e^T = e^{S+T}.$$

(b) Finden Sie ein Beispiel für eine geeignete lineare Abbildungen $S, T : V \to V$ ($V$ geeignet), so dass

$$e^S e^T \neq e^{S+T}.$$

**Lösungshinweise:**

(a) Aus $ST = TS$ folgt

$$(S+T)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

Sei $\sum C_n$ das Cauchyprodukt von $e^S$ und $e^T$. Dann gilt

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k!} A^k B^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \frac{1}{n!}(A+B)^n.$$

(b) Für $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $ST = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $S + T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

In Aufgabe G3(i) wurde gezeigt, dass $e^{S+T} = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$.

Außerdem ist $e^{ST} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$.