Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner
Walter Reußwig

Wintersemester 2011/2012
31. Jan. / 01. Feb. 2012

Gruppenübung

Aufgabe G21 (Jordansche Normalform)

(i) Bilden Sie neue Gruppen, sodass in jeder Gruppe mindestens eine Person in der Lage ist, zu einer Matrix eine Basis aus Eigen- und Hauptvektoren zu bestimmen (Stichwort: *Jordansche Normalform*).

(ii) Erklären Sie sich untereinander, wie man eine Basis aus Eigen- und Hauptvektoren zu einer Matrix bestimmt. Verwenden Sie, wenn Sie möchten, die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(iii) Verwenden Sie Ihre Kenntnisse nun dazu, ein Fundamentalsystem der DGL $x'(t) = Ax(t)$ für obiges A zu bestimmen.

Aufgabe G22 (Exakte DGLn)

Überprüfen Sie nachfolgende DGLn auf Exaktheit. Finden Sie gegebenenfalls einen integrierenden Faktor und bestimmen Sie dann die allgemeine Lösung.

(i) $2ty + (2y + t^2)y' = 0$

(ii) $tyy' + t^2 + y^2 + t = 0$

Aufgabe G23 (Lineare DGL)

Bestimmen Sie eine 3×3-Matrix A, sodass die Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt.

Aufgabe G24 (Asymptotisches Verhalten)

Sei $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ eine lineare Abbildung und sei $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $x'(t) = Ax(t)$ mit $x(t_0) = x_0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$.

Geben Sie Bedingungen dafür an, dass $\lim_{t\to\infty} ||x(t)|| = \infty$ oder $\lim_{t\to\infty} ||x(t)|| = 0$ ist.

Hausübung

Die folgenden Aufgaben sind für das Erreichen des Bonus **nicht** relevant, aber natürlich sinnvoll, um sich mit dem Stoff vertraut zu machen. Abgeben können Sie Ihre Lösungen entweder in den Sprechstunden der Übungsleiter oder in den Complex Analysis-Übungen. Wie die Rückgabe der korrigierten Abgaben erfolgt wird über die Homepage der Veranstaltung bekannt gegeben.

Aufgabe H22 (Lineares AWP)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

Lösen Sie dann das AWP für den Anfangswert $x(0) = (1,\ 1,\ \sqrt{2} - 1)^T$.

Aufgabe H23 (Spezielle Lösung)
Sei $\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem von Lösungen eines homogenen linearen DGL-Systems mit konstanten Koeffizienten, $x'(t) = Ax(t)$, $A \in M_n$.
Wir schreiben $\Phi(t)$ für die Matrix $\Phi(t) := (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$, d.h. wir schreiben die Fundamentallösungen $\phi_i(t)$ in die Spalten der Matrix $\Phi(t)$.

Zeigen Sie, dass dann $x(t) = \Phi(t)u(t)$ mit $u(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds$ eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL $x'(t) = Ax(t) + b(t)$ ist.

Hinweis: Dieses Vorgehen spart oft einige Rechenschritte, da man keine Exponentialmatrix aus der Eigen- bzw. Hauptvektorbasis rücktransformieren muß.

Aufgabe H24 (Lineare DGLen)

i) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$.

ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) - y(t) = \sinh t\ .$$