Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen
6. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner
Walter Reußwig

Wintersemester 2011/2012
17./18. Januar 2012

Gruppenübung

Aufgabe G18 (Standardgegenbeispiel)
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = x(t)^{\frac{2}{3}}, \qquad x(0) = 0.$$

(i) Welche Lösung dieses AWPs lässt sich sofort erraten?

(ii) Bestimmen Sie eine weitere Lösung durch Trennung der Variablen.

(iii) Setzen Sie die Lösungen aus (i) und (ii) zu weiteren (stückweise definierten) Funktionen zusammen, die ebenfalls das AWP lösen.
Hinweis: Welche Nullstellen haben die Lösungen aus (ii)?

(iv) Lösen Sie den scheinbaren Widerspruch zum lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf auf.

Aufgabe G19 (Spezielle Lösungsansätze eindimensionaler DGLn)
Zeigen Sie, dass man jede der folgenden Differentialgleichungen mit der angegebenen Substitution auf eine lineare DGL bzw. eine DGL mit getrennten Variablen zurückführen kann. Dabei sind $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$ und f, g Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(i) $x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right)$; Substitution $u(t) = \frac{x(t)}{t}$.
Hinweis: In diesem Fall ergibt sich die DGL $u'(t) = \frac{f(u(t))-u(t)}{t}$. Hat man das entsprechende AWP für $u(t)$ gelöst, so erhält man daraus die gesuchte Lösung für $x(t)$.

(ii) $x'(t) = f(at + bx(t) + c)$; Substitution $u(t) := at + bx(t) + c$.

(iii) $x'(t) = f(t)x(t) + g(t)x^{\alpha}(t)$, $\alpha \notin \{0, 1\}$; Substitution $u(t) := x^{1-\alpha}(t)$.
Diese DGL heißt auch *Bernoulli-Differentialgleichung*.

Aufgabe G20 (Herrchen & Hund)
Durch die x-y-Ebene fließt ein Fluss, dessen Ufer durch $x = 0$ und $x = 1$ gegeben sind. Er fließt mit konstanter und homogener Geschwindigkeit v_0 in positive y-Richtung. Ein Hund springt im Punkt $(1, 0)$ in den Fluss und versucht, sein Herrchen zu erreichen, welches in $(0, 0)$ auf ihn wartet. Der Hund schwimmt mit konstanter Geschwindigkeit v_1 und richtet sich immer genau auf sein Herrchen, während er abgetrieben wird.

(i) Stellen Sie eine DGL für die Kurve $y(x)$ des Hundes auf und bestimmen Sie eine Lösung.
Hinweis: Stellen Sie zunächst die Bewegungsgleichung des Hundes auf und bestimmen Sie $\frac{dy}{dx}$ unter Verwendung der Kettenregel.

(ii) Untersuchen Sie die Kurve des Hundes in Abhängigkeit des Geschwindigkeitsverhältnisses $\frac{v_0}{v_1}$.
Hinweis: Unterscheiden Sie mehrere Fälle und nutzen Sie, dass $\sinh(\ln(a)) = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})$ ist.

Hausübung

Aufgabe H18 (Picard-Iteration) (1 Punkt)
Gegeben seien die Anfangswertprobleme

$$\text{a)}\quad x'(t) = x(t),\ x(0) = x_0 \qquad \text{und} \qquad \text{b)}\quad y'(t) = t\,y(t) + t^3,\ y(0) = 0.$$

(i) Führen Sie jeweils die Picard-Iteration durch und bestimmen Sie Intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ auf denen die Funktionenfolge $x_n(t)$ bzw. $y_n(t)$ gleichmäßig gegen eine Lösung konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass die Lösung durch eine auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe gegeben ist und bestimmen Sie deren Grenzfunktion.

Hinweis: $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n n!$

Aufgabe H19 (Fortsetzen von Lösungen) (1 Punkt)

(i) Lösen Sie das AWP

$$y'(t) = 2t\,y^2(t), \quad y(0) = y_0 > 0.$$

(ii) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich Ihrer Lösung an. Verlässt der Graph Ihrer Lösung tatsächlich jedes den Anfangswert y_0 enthaltende Kompaktum in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (vgl. Vorlesung)?

Aufgabe H20 (DGLn) (1 Punkt)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGLn.

(i) $y'(t) = e^y \cos t$.

(ii) $t\,y'(t) - 2y(t) = t^2\sqrt{y(t)},\ y(1) = 1,$ wobei $I = (0, \infty)$ ist.

Aufgabe H21 (Existenz und Eindeutigkeit) (1 Punkt)
Für ein AWP $y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0$ lässt sich die Iterationsfolge

$$\phi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s$$

der Picard-Iteration auch dann bilden, wenn $f(t, y)$ nicht lokal Lipschitz-stetig ist. Aber die Hoffnung, dass die Folge (ϕ_n) gegen eine Lösung des AWP konvergiert, kann trügen.

(i) Sei $f(t, y)$ stetig. Zeigen Sie: Wenn (ϕ_n) auf geeignetem kompakten Intervall J gleichmässig gegen ϕ konvergiert, so ist ϕ auf J Lösung der Gleichung $y' = f(t, y)$.

Betrachten Sie nun die auf $R := \{(t, y) : \ |t| \le 1, |y| \le 1\}$ definierte Funktion

$$f(t,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0,\ |y| \le 1, \\ 2t & \text{für } 0 < |t| \le 1,\ -1 \le y < 0, \\ 2t - 4\frac{y}{t} & \text{für } 0 < |t| \le 1,\ 0 \le y < t^2, \\ -2t & \text{für } 0 < |t| \le 1,\ t^2 \le y \le 1\,. \end{cases}$$

(ii) Zeigen Sie, dass f stetig, aber nicht lokal Lipschitz-stetig ist.

(iii) Stellen Sie für das AWP

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0$$

die Iterationsfolge auf und zeigen Sie, dass sie nicht konvergent ist.
Hinweis: Die Rechnungen sind einfacher, als es auf den ersten Blick scheint.

(iv) Finden Sie gleichmässig konvergente Teilfolgen und zeigen Sie, dass auch diese keine Lösungen der DGL sind.

Aber: Die Existenz mindestens einer Lösung wird durch einen *Existenzsatz von Peano* für stetige Funktionen $f(t, y)$ garantiert!