Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner
Walter Reußwig

Wintersemester 2011/2012
06./07. Dezember 2011

Gruppenübung

Aufgabe G11 (Untermannigfaltigkeit !?)

(i) Machen Sie sich nochmals klar, dass der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ eine 1-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist, indem Sie *jede* der vier äquivalenten Bedingungen aus der Vorlesung direkt zeigen.

(ii) Betrachten Sie die Menge

$$K := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - y^2 = 0\right\}.$$

Welche Punkte in K haben eine offene Umgebung U, so dass $K \cap U$ eine 1-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist? In den Ausnahmepunkten können Sie rein anschaulich argumentieren.

Aufgabe G12 (Tangentialebene)

Sei $\Omega :=]-\pi, \pi[\times]0, \pi[\subseteq \mathbb{R}^2$, $x_0 = (\alpha_0, \beta_0) \in \Omega$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ die folgende Parametrisierung der Kugeloberfläche

$$f(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : h \mapsto f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) \cdot h$$

eine Parametrisierung der Tangentialebene an die Kugel im Punkt $f(x_0)$ gegeben ist.

Aufgabe G13 (Torus)

Als Torus im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet man die Oberfläche eines „Schwimmringes“, der z.B. entsteht, wenn man den in der x-z-Ebene liegenden Kreis mit Radius r, Mittelpunkt $(R, 0, 0)$ und $0 < r < R$ um die z-Achse rotieren lässt.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung dieses Torus im $\mathbb{R}^3$ an.

(b) Zeigen Sie, dass der Torus eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ darstellt.

Aufgabe G14 (Untermannigfaltigkeit)
Sei $\mathscr{M}$ die Menge der reellen 2×2-Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

und sei $\mathscr{G} := \{A \in \mathscr{M} \ : \ \det(A) = 1\}$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{G}$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathscr{M}$ ist.

Hausübung

Aufgabe H12 (Eigenwerte symmetrischer Matrizen) (1 Punkt)
Zeigen Sie, dass eine symmetrische $n \times n$-Matrix A mindestens einen Eigenwert hat, indem Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ auf Maxima und Minima unter der Nebenbedingung $\|x\|_2 = 1$ untersuchen.
Hinweis: Warum ist die Existenz des Maximums und des Minimums gesichert?

Aufgabe H13 (Extrema unter Nebenbedingungen) (1 Punkt)
Bestimmen Sie das absolute Minimum und das absolute Maximum der Funktion

$$h(x, y, z) = 5x + y - 3z$$

auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Aufgabe H14 (Orthogonale Gruppe) (1 Punkt)
Sei $\mathscr{O}(n) := \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ A^T A = \mathbb{1}\right\}$ die orthogonale Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{O}(n)$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $M_n(\mathbb{R})$ ist.
Betrachten Sie hierfür die Abbildung $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(n) : A \mapsto A^T A$, wobei $\mathscr{S}(n)$ die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen bezeichnet, d.h. $\mathscr{S}(n) := \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ A = A^T\right\}$.
Zeigen Sie als Zwischenschritte insbesondere, dass die Ableitung von f durch
- $\mathrm{d}f(A) : M_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(n) : B \mapsto B^T A + A^T B$ gegeben und
- $\mathrm{d}f(A_0)$ für $A_0 \in \mathscr{O}(n)$ surjektiv ist.

(b) Berechnen Sie die Dimension von $\mathscr{O}(n)$. (*Hinweis:* Welche Dimension hat $\mathscr{S}(n)$?)

(c) Geben Sie den Tangentialraum im Punkt $A_0 = \mathbb{1}$ an. (*Hinweis:* Welche Charakterisierung des Tangentialraums eignet sich hierfür am besten?)

Im Auftrag der Fachschaft: Informationen zum Mathebau-Adventskalender

Liebe Studis,
Die Weihnachtszeit steht vor der Tür und wie jedes Jahr verwandelt sich der Mathebau zu dieser Zeit in einen Adventskalender, der Süßigkeiten und Überraschungen für euch bereit hält!
An einigen Bürotüren hängen Plakate mit Rätseln, welche eine (Tages)Zahl ergeben. Klopft ihr am richtigen Tag an die richtige Tür, erwarten euch Plätzchen, Lebkuchen und ein freundlicher Professor oder Mitarbeiter. Außerdem könnt ihr Stempel sammeln und an der Verlosung weiterer toller Preise teilnehmen. Mehr Infos gibt es unter *http://www.mathebau.de*.
Weihnachtliche Grüße,
Eure Fachschaft