Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner
Walter Reußwig

Wintersemester 2011/2012
22./23. November 2011

Gruppenübung

Aufgabe G8 (Invertierbarkeit)
Sei $\mathbb{1} \in M_n(\mathbb{C})$, C eine komplexe $m \times n$-Matrix und $D \in M_m(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass eine Blockmatrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{n+m}(\mathbb{C})$$

genau dann invertierbar ist, wenn die Matrix D invertierbar ist. Bestimmen Sie ggf. die Inverse.

Aufgabe G9 (Implizite Funktionen und Differentialgleichungen)

(a) Die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f(x_0, y_0) = c$ sei in einer (offenen) Umgebung $U \subseteq \Omega$ von (x_0, y_0) lokal nach y auflösbar. Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, deren Lösung $g : \mathbb{R} \supseteq U \to \mathbb{R}$ der durch $f(x, g(x)) = c$ implizit gegebenen Funktion entspricht.

(b) Lösen Sie die Gleichung $x^2 + y^2 = c$ nach y auf und verifizieren Sie, dass die Funktion(en), die Sie erhalten, tatsächlich die in (a) bestimmte zugehörige Differentialgleichung lösen.

Aufgabe G10
An welchen Stellen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kann man die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

nach x auflösen, an welchen Stellen nach y und an welchen Stellen kann die Gleichung nach beiden Variablen aufgelöst werden?

Hausübung

Aufgabe H8 (Implizite Funktionen) (1 Punkt)

(a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u + \cos(u \cdot v) &= v \cdot x + 1 \\ \sin(u) &= y + v \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, -1, 0, 1)$ nach u und v auflösbar ist.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von u und v an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, -1)$.

Aufgabe H9 (Untermannigfaltigkeit) (1 Punkt)
Zeigen Sie, dass die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit im Sinne der Definition der Vorlesung ist.

Aufgabe H10 (Anwendung des Satzes über implizite Funktionen) (1 Punkt)
Für positive, reelle Konstanten a, b, R betrachten wir die Funktion

$$F : \mathbb{R}^3 \supseteq \Omega \to \mathbb{R} \,:\, (p, v, T) \mapsto \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) - RT.$$

Zeigen Sie durch Anwendung des Satzes über implizite Funktionen, dass im Gebiet

$$D = \left\{(p, v, T) \in \mathbb{R}^3 \,:\, v > b,\ \frac{\partial F}{\partial v}(p, v, T) \neq 0\right\} \subseteq \Omega$$

die Identität

$$\frac{\partial v}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial v} = -1$$

erfüllt ist. (Die Funktion F habe in D eine Nullstelle.)

Bemerkungen: Das Produkt hat also nicht den Wert 1, den man durch "Kürzen" erhalten würde. Interpretiert man p als Druck, v als molares Volumen und T als absolute Temperatur entspricht die Gleichung $F(p, v, T) = 0$ bzw. $p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$ der *Van-der-Waals-Gleichung*, einer angenäherten Zustandsgleichung für reale Gase.

Aufgabe H11 (Zusatzaufgabe zur Thermodynamik) (1 Zusatzpunkt)
Der thermodynamische Zustand eines Gases mit fester Teilchenzahl kann durch die beiden Variablen Temperatur T und Volumen V beschrieben werden. Ein Prozess wird dann durch eine Kurve in der T-V-Ebene ($T, V \geq 0$) beschrieben; eine Parametrisierung der Prozesskurve π sei in der Gestalt

$$\pi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2 \,:\, T \mapsto (T, V(T))$$

möglich. Ist $S : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : (T, V) \mapsto S(T, V)$ die Entropiefunktion des Gases, so kann man die spezifische Wärme c_π des Prozesses durch

$$c_\pi(T) := T \cdot (S \circ \pi)'(T)$$

definieren. Die Größe c_π beschreibt die pro Temperaturänderung bewirkte Änderung der Wärmemenge des Gases während des Prozesses π. Im Falle eines idealen Gases mit N Teilchen der Masse m ist

$$S(T, V) = Nk\left(\ln\left((2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}\right) + \ln\left(\tfrac{V}{N}\right) + \tfrac{5}{2}\right);$$

dabei ist k die Boltzmann-Konstante.

(a) Berechnen Sie c_π für die folgenden Prozesskurven:
   (i) $V(T) = \text{const.}$ (*isochorer Prozess*, ergibt c_v),
   (ii) $V(T) = \frac{NkT}{p}$, $p = \text{const.}$ (*isobarer Prozess*, ergibt c_p).
   Zeigen Sie, dass $c_p - c_v = Nk$ gilt.
(b) Bestimmen Sie diejenigen Kurven, entlang derer $c_\pi(T) \equiv 0$ gilt (die *adiabatischen Prozesse*). Nutzen Sie dazu den Ansatz $V(T) = aT^b$ mit zu berechnenden Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$.