Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner
Walter Reußwig

Wintersemester 2011/2012
08./09. November 2011

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Für lineare Abbildunge ist stetig = beschränkt)
Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume und $T: V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass T genau dann stetig ist, wenn T beschränkt ist.

Aufgabe G5 (Lineare Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$ sind beschränkt)
Zeigen Sie, dass für jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ gilt: Jede lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und damit stetig.

Aufgabe G6 (Stetige Koordinatenfunktionen)
Für $1 \leq i, j \leq n$ seien die Funktionen $f_{ij}: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion $F: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to M_n(\mathbb{R}): x \mapsto \left(f_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^n$ stetig ist.

Bemerkung: Insbesondere folgt damit aus der Stetigkeit aller partiellen Ableitungen einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auch die Stetigkeit von $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$.

Aufgabe G7 (Exponentialmatrix)
Für $A \in M_n(\mathbb{C})$ definieren wir die Spur von $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ als die Summe der Diagonalelemente von A, d.h.

$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii} \;.$$

(i) Wenn Sie das nicht bereits in der linearen Algebra getan haben, dann zeigen Sie, dass für alle $A_1, \ldots, A_m \in M_n$ gilt:

$$\operatorname{tr}(A_1 \cdot A_2 \cdots A_m) = \operatorname{tr}(A_m \cdot A_1 \cdots A_{m-1}).$$

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $A \in M_n(\mathbb{C})$ gilt:

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr}(A)}.$$

Hausübung

Aufgabe H5 (Inversenbildung stetig) (1 Punkt)

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) Die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist offen in $M_n(\mathbb{C})$.

(b) Die Inversenbildung $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : A \mapsto A^{-1}$ ist stetig bzgl. der Operatornorm.

Hinweise: Sie können die Aussagen aus Aufgabe H1 über die geometrische Reihe (nach Carl Neumann (*1832, †1925) auch *Neumann Reihe* genannt) nutzen. Welche Bedingung garantiert für $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $B \in M_n(\mathbb{C})$ die Invertierbarkeit von $A^{-1}B$?
Nutzen Sie für (b) zunächst die Identität $S^n - T^n = \sum_{k=0}^{n-1} S^{n-1-k}(S-T)T^k$ um zu zeigen, dass $T \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ auf $K_q(0)$, $q < 1$, stetig ist.

Aufgabe H6 (Satz über die Umkehrfunktion) (1 Punkt)

(a) Führen Sie die ersten drei Beweisschritte des Satzes über die Umkehrfunktion in $\mathbb{R}^n$ für den Fall der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ in $x_0 = 0$ durch, dabei wird vieles einfacher.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) und der Iteration des Banachschen Fixpunktsatzes näherungsweise arcsin(0.5), bis Sie eine Genauigkeit von drei Nachkommastellen erreicht haben.

Aufgabe H7 (Anwendung des Satzes über die Umkehrfunktion) (1 Punkt)

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Sei $a = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ so gewählt, dass das Polynom

$$p_a(t) = t^3 - a_2 t^2 + a_1 t - a_0$$

drei verschiedene reelle Nullstellen hat. Dann sind auch die Nullstellen des Polynoms $p_{\tilde{a}}$ mit Koeffizienten $\tilde{a} = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ aus einer Umgebung von a verschieden und die Nullstellen hängen stetig differenzierbar von den Koeffizienten ab.

Was können Sie aussagen, wenn zwei oder drei Nullstellen gleich sind?

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion, die die Nullstellen auf die Koeffizienten abbildet, und zerlegen Sie p_a in Linearfaktoren.