Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen
1. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner
Walter Reußwig

Wintersemester 2011/2012
25./26. Oktober 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Operatornorm)
Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume und $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist die *Operatornorm* von T gegeben durch

$$\|T\|_{\mathrm{op}} := \sup\left\{\|Tx\|_W \;:\; \|x\|_V \leq 1\right\}.$$

Die Menge der beschränkten linearen Operatoren von V nach W bezeichnen wir mit

$$\mathscr{B}(V,W) := \left\{T : V \to W \;\text{ linear, }\; \|T\|_{\mathrm{op}} < \infty\right\}.$$

Zeigen Sie, dass für $S, T \in \mathscr{B}(V,W)$ die folgenden Aussagen gelten:

(i) Die Dreiecksungleichung $\|S+T\|_{\mathrm{op}} \leq \|S\|_{\mathrm{op}} + \|T\|_{\mathrm{op}}$ ist gültig.

(ii) Die Operatornorm ist submultiplikativ, d.h. $\|ST\|_{\mathrm{op}} \leq \|S\|_{\mathrm{op}} \cdot \|T\|_{\mathrm{op}}$.

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|T^n\|_{\mathrm{op}} \leq \|T\|_{\mathrm{op}}^n$.

Aufgabe G2 (Operatornormen berechnen)
Geben Sie zu den folgenden linearen Abbildungen jeweils die Operatornorm an und beweisen Sie Ihre Behauptungen.

(a) $A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad A_2 := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) $L_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle x, y \rangle$.

Aufgabe G3 (Exponentialmatrix)
Sei V ein Banachraum (Erinnerung: Das ist ein vollständiger normierter Raum). Für eine lineare Abbildung $T : V \to V$ definieren wir

$$e^T := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

(i) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie e^A.

(ii) Sei $D \in M_n(\mathbb{C})$ eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $d_1, \ldots, d_n$. Zeigen Sie, dass e^D wiederum eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $e^{d_1}, \ldots, e^{d_n}$ ist.

(iii) Seien $A, S \in M_n(\mathbb{C})$ und sei S invertierbar. Zeigen Sie, dass dann $Se^AS^{-1} = e^{SAS^{-1}}$ gilt.

Hausübung

Aufgabe H1 (Geometrische Reihe) (1 Punkt)
Sei V ein Banachraum und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass für $\|T\|_{\mathrm{op}} < 1$ gilt:

$$(\mathbb{1} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge ist und anschließend die Behauptung über den Grenzwert.

Aufgabe H2 (Banachscher Fixpunktsatz in Banachräumen) (1 Punkt)
Sei V ein Banachraum und $M \subseteq V$ eine abgeschlossene Teilmenge. Ferner sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ eine Folge in M. Zeigen Sie:

(a) Existiert ein $C > 0$ und ein $0 < q < 1$, so dass $\|x_{k+1} - x_k\| \leq C \cdot q^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Existiert ein $0 < q < 1$, so dass $\|x_{k+1} - x_k\| \leq q \cdot \|x_k - x_{k-1}\|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweisen Sie nun mit diesen Resultaten den *Banachschen Fixpunktsatz*:

(c) Sei $f : V \to V$ eine Abbildung, die M invariant lässt (d.h. $f(M) \subseteq M$), und $0 < q < 1$. Ferner erfülle f für alle $x, y \in M$ die Kontraktionsbedingung

$$\|f(x) - f(y)\| \leq q \cdot \|x - y\|.$$

Dann gilt

(i) f besitzt genau einen Fixpunkt $x_0 \in M$, d.h. $f(x_0) = x_0$.

(ii) Für jedes $y_0 \in M$ konvergiert die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_{n+1} := f(y_n)$ gegen x_0.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $x_0 := \lim_{n\to\infty} y_n$ existiert. Zeigen Sie anschließend mit Hilfe der Kontraktionsbedingung, dass x_0 ein Fixpunkt von f ist, sowie dessen Eindeutigkeit.

Der Banachsche Fixpunktsatz kann auch für Kontraktionen auf vollständigen metrischen Räumen formuliert und bewiesen werden, wie wir bereits in Analysis I, 12. Übung, gesehen haben.

Aufgabe H3 (Einfache Anwendungen des Banachschen Fixpunktsatzes) (1 Punkt)

(a) Finden Sie eine affine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so dass ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ genau dann das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ($A \in M_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$) löst, wenn $g(x_0) = x_0$ gilt.
Formulieren Sie eine Bedingung an die Matrix A, die es erlaubt den Banachschen Fixpunktsatz zu nutzen, um die Existenz einer eindeutigen Lösung zu garantieren.

(b) Sei $T \in M_n(\mathbb{R})$ und $A := \mathbb{1} - T$. Dann wird die in (a) gesuchte Bedingung für eine geeignete Wahl der affinen Funktion g zu $\|T\|_{\mathrm{op}} < 1$.
Bestimmen Sie in diesem Fall für den Startwert $y_0 = 0$ die ersten fünf Folgenglieder der Fixpunkt-Iteration aus Aufgabe H2(c). Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Aufgabe H1.

Aufgabe H4 (Funktionalgleichung) (1 Punkt)
Sei V ein Banachraum und $S, T : V \to V$ lineare Abbildungen.

(a) Sei $ST = TS$. Nimm an, dass frühere Resultate über das Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen auch auf Banachräumen gültig sind, um zu zeigen, dass

$$e^S e^T = e^{S+T}.$$

(b) Finde ein Beispiel für eine geeignete lineare Abbildungen $S, T : V \to V$ (V geeignet), so dass

$$e^S e^T \neq e^{S+T}.$$