

Einführung in die Optimierung

13. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Nicole Megow
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2011/2012
02./03.02.2012

Gruppenübung

Aufgabe G31 (Strategie der aktiven Mengen)
Betrachte das quadratische Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & -x_1 - x_2 \leq -1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Löse dieses Problem mit der Strategie der aktiven Menge, wobei als Startpunkt $x^0 = (1, 1)$ verwendet werden soll. Skizziere die zulässige Menge und zeichne die Iterationspunkte x^k ein.

Aufgabe G32 (KKT-Bedingungen)
Betrachte das Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & -3x_1 - x_2 + 10 \leq 0 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ & -x_1 - 3x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

- (a) Zeige, dass im Punkt $x^* = (3, 1)$ die KKT-Bedingungen erfüllt sind. Bestimme dabei auch den zugehörigen Lagrange-Multiplikator u^* .
- (b) Zeige mit Hilfe der KKT-Bedingungen, dass sich in $\bar{x} = (\frac{15}{4}, \frac{5}{4})$ kein Optimum befindet.

Hausübung

Aufgabe H41 (QP mit Lagrange-Multiplikatoren)
Gegeben sei das Problem:

(3 Punkte)

$$\begin{aligned} \min \quad & -\frac{1}{2}(x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2) \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1 + x_2 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie zu den Lagrange-Multiplikatoren $u^* = (6, 0, 8, 0)^T$ den KKT-Punkt.

Aufgabe H42 (Quadratische Probleme)

(3 Punkte)

Zeige: Das quadratische Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^T Qx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

mit $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit, $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ vom Rang m und $b \in \mathbf{R}^m$ besitzt (unter der Annahme, dass die zulässige Menge nicht leer ist) eine eindeutige Lösung.

Aufgabe H43 (Quadratische Probleme)

(6 Punkte)

Formuliere ein quadratisches Optimierungsproblem im \mathbf{R}^n , das 2^n verschiedene lokale Minima besitzt.**Aufgabe H44** (Modellierung)

(3 Punkte)

Mit dem Satelliten-Kontroll-System GPS kann ein GPS-Gerät, seine Position auf der Erde bis auf eine Genauigkeit von etwa 10 Metern bestimmen. Dabei wird folgendermaßen vorgegangen: Jeder Satellit verfügt über eine Atomuhr. Von den Satelliten im Orbit der Erde wird die aktuelle Zeit und die aktuelle Position gesendet. Empfängt das GPS-Gerät die Signale von mindestens vier Satelliten, läßt sich daraus die aktuelle Zeit sowie die aktuelle Position des GPS-Geräts bestimmen. Stelle ein Optimierungsproblem zur möglichst genauen Berechnung der Position des GPS-Gerätes auf.