Einführung in die Optimierung
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Nicole Megow
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2011/2012
26./27.01.2012

Gruppenübung

Aufgabe G28 (Tangentialkegel)
Sei

$$\mathcal{X} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid -2x + y - 1 \leq 0, \\ -2x - y - 1 \leq 0, \\ x + y - 1 \leq 0 \\ x - y - 1 \leq 0\}.$$

(a) Skizziere die Menge $\mathcal{X}$.

(b) Bestimme die Tangentialkegel von $\mathcal{X}$ in den Punkten $p_1 = (-\frac{1}{2}, 0)$, $p_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $p_3 = (0,0)$ und zeichne die Tangentialkegel von $\mathcal{X}$ in p_1 und p_2 in die Skizze ein.

(c) Bestimme anhand der Skizze alle lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f : \mathcal{X} \to \mathbf{R} : (x,y) \mapsto x^2 + y^2.$$

Aufgabe G29 (Notwendige Optimalitätsbedingungen)
Formuliere analog zum Satz 7.2 aus der Vorlesung die notwendige Optimalitätsbedingung für den Fall, dass

(a) es sich um ein Maximierungsproblem handelt,

(b) die lokale Lösung $\bar{x}$ ein innerer Punkt von $\mathcal{X}$ ist.
Hinweis: Zeige Sie:

$$\nabla f(\bar{x})^T s \geq 0 \text{ für alle } s \in \mathbf{R}^n. \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla f(\bar{x}) = 0$$

Aufgabe G30 (Lokale Minima)
Betrachte das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \quad f(x)$$

mit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f \in C^2$. Überprüfe jeweils, ob der Punkt x^*
(i) sicher kein lokaler Minimalpunkt ist,
(ii) eventuell ein lokaler Minimalpunkt sein könnte.

(a) $\mathcal{X} = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 1\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (1,1)^T$.

(b) $\mathcal{X} = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 1, x_2 \geq 2\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (1,0)^T$.

(c) $\mathcal{X} = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (0,0)^T$.

Hausübung

Aufgabe H37 (KKT-Bedingungen) (5 Punkte)

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$(P1)\quad \begin{array}{lll} \max & 5x_1 + 8x_2 & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 & \leq \; 8 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq \; 4 \\ & x_1, x_2 & \geq \; 0 \end{array}$$

Formuliere die KKT-Bedingungen für (P1). Verifiziere für jeden Eckpunkt (algebraisch und geometrisch), ob die KKT-Bedingungen gelten. Was ist die globale Lösung?

Aufgabe H38 (Tangentialkegel) (4 Punkte)

Seien $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2 \subset R^n$ abgeschlossen. Beweise oder widerlege:

(a) Sei $x \in \mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2$ und bezeichne $\mathscr{T}_1$ und $\mathscr{T}_2$ den Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1$ bzw. $\mathscr{X}_2$ in x. Dann ist der Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2$ in x die Menge $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$.

(b) Sei $x \in \mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2$ und bezeichne $\mathscr{T}_1$ und $\mathscr{T}_2$ den Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1$ bzw. $\mathscr{X}_2$ in x. Dann ist der Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2$ in x die Menge $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$. (Für den Fall, dass $x \notin \mathscr{X}$ gilt, sei der Tangentialkegel von $\mathscr{X}$ in x als die leere Menge definiert.)

Aufgabe H39 (Slater-Bedingung) (4 Punkte)

Gegeben sei das konvexe Optimierungsproblem

$$\min f(x) \;\text{ s.t. }\; c(x) \leq 0,$$

mit konvexen, zumindest einmal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Die sogenannte Slater-Bedingung lautet: Es gibt einen Punkt $y \in \mathbb{R}^n$, mit $c(y) < 0$.

Zeige, dass aus der Slater-Bedingung die Constraint Qualification folgt, d.h. für alle $x \in \mathscr{X}$ gilt $\mathscr{T}(x) = \mathscr{L}_{\mathscr{X}}(x)$.