Einführung in die Optimierung
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Nicole Megow
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2011/2012
20./21.01.2012

Gruppenübung

Aufgabe G35 (Größe der Ecken von Polyedern)
Seien $P = \{x \in \mathbb{R}^4 | Ax \leq b, x \geq 0\}$ und $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 | Bx \leq d, x \geq 0\}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sei $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine beliebige Ecke von P und sei $v_i, 1 \leq i \leq 4$, eine beliebige Koordinate von v. Gib obere Schranken für den Absolutbetrag des Zählers von v_i, für den Absolutbetrag des Nenners von v_i und für $|v_i|$ an. Löse dieselbe Aufgabe für eine beliebige Ecke $q = (q_1, q_2, q_3)$ von Q. Kann man diese Schranken verbessern?

Aufgabe G36 (Die Ellipsoidmethode)

(a) Betrachte das Polyeder $\mathscr{P} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \leq b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Wie viele Iterationen benötigt die Ellipsoidmethode höchstens, um zu entscheiden, ob $\mathscr{P}^0$ leer ist oder nicht?

(b) In der ersten Iteration der Ellipsoidmethode seien $a_1 = (0,0)^T$ und $A_1 = 2I$ gegeben. Sei $x + y \leq -1$ eine der verletzten Ungleichungen. Bestimme a_2 und A_2 und stelle die Ellipsoide $\mathscr{E}_1$ und $\mathscr{E}_2$ sowie die Geraden $g := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = -1\}$ und $g_t := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0\}$ graphisch dar.

Aufgabe G37 (Innere-Punkte-Verfahren)
Wir betrachten ein Beispiel für ein Innere-Punkte-Verfahren mit einem speziellen zentrallen Pfad. Wir möchten das LP $\max c^T x,\ s.t.\ Ax \leq b,\ x \geq 0$ lösen. Das Einführen von Schlupfvariablen liefert die Nebenbedingungen $Ax + w = b, x \geq 0, w \geq 0$. Für ein $\mu > 0$ betrachten wir das Problem

$$\begin{aligned} &\max c^T x + \mu \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) + \mu \sum_{i=1}^{m} \log(w_i) \\ &s.t.\ Ax + w = b. \end{aligned} \tag{*}$$

Für jeden inneren Punkt des Polytops $P := \{(x, w) : Ax + w = b, x \geq 0, w \geq 0\}$ gilt $(x, w) > 0$. Da der Logarithmus für Werte gegen 0 immer kleiner wird, wird die obige Zielfunktion immer kleiner, je näher (x, w) dem Rand kommt. Unter geeigneten Voraussetzungen, gibt es für jedes $\mu > 0$ eine Lösung $(x^*(\mu), w^*(\mu))$ von (*) und $(x^*(0), w^*(0))$ ist offensichtlich die Lösung des ursprünglichen Problems. Wir wollen nun die Lösungen von (*) untersuchen.

(a) Sei

$$L(x, w, y) = c^T x + \mu \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) + \mu \sum_{i=1}^{m} \log(w_i) + y^T (b - Ax - w)$$

die sogenannte Lagrangefunktion zu (*). Man kann zeigen, dass ein stationärer Punkt von $L(x,w,y)$, also ein Punkt, für den der Gradient ∇L verschwindet, das Optimierungsproblem (*) maximiert. Zeige, dass ein stationärer Punkt (x^*,w^*,y^*) von L folgende Gleichungen erfüllt:

$$Ax + w = b, \tag{I}$$
$$A^T y - z = c, \tag{II}$$
$$y_i w_i = \mu,\ i = 1,\dots m, \tag{III}$$
$$x_j z_j = \mu,\ j = 1,\dots n. \tag{IV}$$

(b) Das System (I) beschreibt die Gleichungsrestriktionen unseres ursprünglichen LP's, das System (II) beschreibt die Gleichungsrestriktionen des dazu dualen LP's. Für $\mu = 0$ sollten Dir die Gleichungen (III) und (IV) bekannt vorkommen. Woher?

Hausübung

Aufgabe H29 (Kodierungslänge eines Rucksackproblems) (3 Punkte)

Das Rucksackproblem ist ein Optimierungsproblem der Kombinatorik. Aus einer Menge von Objekten, die jeweils ein Gewicht und einen Nutzwert haben, soll eine Teilmenge ausgewählt werden, deren Gesamtgewicht eine vorgegebene Gewichtsschranke nicht überschreitet. Unter dieser Bedingung soll der Nutzwert der ausgewählten Objekte maximiert werden.

Mathematische Formulierung lautet:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{i=1}^n c_i x_i & \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad \leq & b \quad , \\ & x_i \in \{0,\,1\} & \forall i \end{array}$$

dabei sind a_i die positive Gewichten, c_i die positive Werten und b eine Schranke für das maximale Gewicht, das mit dem Rucksack getragen werden kann.

Schätze die Kodierungslänge nach oben ab.

Beachte: Alle Werte sind positiv!

Aufgabe H30 (Innere-Punkte-Verfahren) (5 Punkte)

Wir möchten uns nun wieder mit dem Innere-Punkte-Verfahren aus Aufgabe G37 beschäftigen. Betrache das LP

$$\begin{aligned} \max\ & -x_1 + x_2 \\ s.t.\ & x_2 \leq 1, \\ & -x_1 \leq -1, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(a) Sei

$$x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + 2\mu + \sqrt{1+4\mu^2} \\ 1 - 2\mu + \sqrt{1+4\mu^2} \end{pmatrix},\ w = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + 2\mu - \sqrt{1+4\mu^2} \\ -1 + 2\mu + \sqrt{1+4\mu^2} \end{pmatrix}.$$

und $y = (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$, $z = (z_1, z_2) = (w_1, w_2)$. Zeige, dass dieser Vektor (x,w,y,z) die Gleichungen (I-IV) aus Aufgabe G37 erfüllt.

Damit ist (x,w,y,z) ein stationärer Punkt von L und löst somit (*), weshalb die Lösungen $(x(\mu), w(\mu), y(\mu), z(\mu))$ einen zentralen Pfad bilden.

(b) Zeichne den zentralen Pfad, also die Lösungen x des Vektors (x,w,y,z) für mindestens 3 Werte von $\mu > 0$ und für $\mu = 0$ in dem Zulässigkeitsbereich des gegebenen LP's ein.

Aufgabe H31 (Der Kettenbruchalgorithmus) (5 Punkte)

Das Problem, reelle Zahlen durch rationale Zahlen zu approximieren, ist ein altes und bekanntes Problem aus der Zahlentheorie. In dieser Aufgabe wollen wir das zweidimensionale Approximationsproblem angehen. Dieses Resultat ist hilfreich, um die Äquivalenz des Separierungs- und des Optimierungsproblems zeigen. Dazu betrachten wir folgendes Problem:

Gegeben sei eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{Q}, 0 < \varepsilon < 1$. Gesucht sind ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit

$$1 \leq q \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{\varepsilon}{q}.$$

Auf den ersten Blick ist nicht einzusehen, dass solch eine rationale Zahl immer existiert, aber genau dies ist der Fall. Mehr noch, eine solche Zahl kann sogar in polynomialer Zeit bestimmt werden. Dazu dient der folgende Algorithmus:

Input: $\alpha \in \mathbb{Q}, \varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$.

Output: p und q mit $1 \leq q \leq \frac{1}{\varepsilon}$ und $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{\varepsilon}{q}$.

(1) Initialisierung:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha, & a_0 &= \lfloor \alpha \rfloor, \\ g_{-2} &= 0, & g_{-1} &= 1, \\ h_{-2} &= 1, & h_{-1} &= 0, \\ i &= -1. \end{aligned}$$

(2) Führe die folgenden Schritte durch:

(3) $i = i + 1$

(4) $g_i = a_i g_{i-1} + g_{i-2}$

(5) $h_i = a_i h_{i-1} + h_{i-2}$

(6) Falls $h_i > \frac{1}{\varepsilon}$ **STOP** (gib $p = g_{i-1}$ und $q = h_{i-1}$ aus).

(7) Falls $\alpha_i = a_i$ **STOP** (gib $p = g_i$ und $q = h_i$ aus).

(8) $\alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - a_i}$

(9) $a_{i+1} = \lfloor \alpha_{i+1} \rfloor$

(10) Gehe zu (3).

(a) Beweisen Sie: Die Laufzeit des Algorithmus beträgt $O(\log \frac{1}{\varepsilon})$

(b) Approximiere den Wert $\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$ mit einer Genauigkeit von $\varepsilon = 0,01$ durch eine rationale Zahl. D.h. finde

$$p, q \in \mathbb{N} \text{ mit } |\sqrt{2} - \frac{p}{q}| < \frac{0,01}{q}, \quad 1 \leq q \leq 100.$$