Einführung in die Optimierung
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Nicole Megow
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2011/2012
12./13.01.2012

Gruppenübung

Aufgabe G31 (Ellipsoide)

(a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeichne das Ellipsoid $\mathscr{E}(A, a) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1\}$.

(b) Sei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und $a \in \mathbf{R}^n$. Zeige, dass das Ellipsoid

$$\mathscr{E}(A, a) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1\}$$

das Bild der Einheitskugel (*image of the union ball*) $\mathscr{B} = \{u \in \mathbf{R}^n \mid \|u\|_2 \leq 1\}$ unter der affinen Transformation $f(u) = A^{\frac{1}{2}}u + a$ ist. Damit ergibt sich als äquivalente Darstellung von $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{E}(A, a) = \{a + A^{\frac{1}{2}}u \mid \|u\|_2 \leq 1\}.$$

Aufgabe G32 (Laufzeit)

Der Strassen-Algorithmus (benannt nach dem deutschen Mathematiker Volker Strassen) ist ein Algorithmus aus der Linearen Algebra und wird zur Matrizenmultiplikation verwendet.
Sei $k \in \mathbf{N}$ und $A, B, C \in \mathbf{R}^{2^k}$ Sei $A, B, C \in \mathbf{R}^N$ mit $N = 2^k$ und $k \in \mathbf{N}$
Man setze

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$
$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \tag{2}$$
$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

$$\begin{aligned}
P &= (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22}) \\
Q &= (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11} \\
R &= A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22}) \\
S &= A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11}) \\
T &= (A_{11} + A_{22}) \cdot B_{22} \\
U &= (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} + B_{12}) \\
V &= (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22})
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= P+S-T+V \\
C_{12} &= R+T \\
C_{21} &= Q+S \\
C_{22} &= P+R-Q+U
\end{aligned}$$

Bestimme der Anzahl der Multikationen und Additionen sowie den Aufwand des Verfahrens unter der Annahme, dass die kleinere Matrix-Multiplikationen mit dem Standart Verfahren berechnet werden.

Aufgabe G33 (Kodierungslänge)
Zeige:

(a) Für jedes $r \in \mathbf{Q}$ gilt: $|r| \leq 2^{\langle r \rangle - 1} - 1$.

(b) Für je zwei rationale Zahlen $r, s \in \mathbf{Q}$ gilt: $\langle rs \rangle \leq \langle r \rangle + \langle s \rangle$.

Aufgabe G34 (Laufzeit)
Betrachte Algorithmus 1, der die Urversion des Euklidischen Algorithmus' zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen $a, b \in \mathbf{N}$ darstellt. Hat dieser eine polynomiale Laufzeit? Bei der Laufzeitanalyse können Vergleiche, Zuweisungen und Subtraktionen als elementare Rechenschritte angesehen werden.

Algorithm 1 Urversion des Euklidischen Algorithmus'

```
while b ≠ 0 do
    if a > b then
        a ← a − b
    else
        b ← b − a
    end if
end while
out a
```

Hausübung

Aufgabe H26 (Phase I mit oberen Schranken) (4 Punkte)
Lösen Sie folgendes Problem mit mit Zweiphasen-Simplex mit oberen Schranken. Verwenden Sie die Tableau-Implementierung.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\
& x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\
& & & x_2 & & & & & \leq & 5 \\
& & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Aufgabe H27 (Reoptimierung) (11 Punkte)
Eine Möbelfirma stellt Regale, Tische, Stühle und Betten her. Zur Herstellung eines Produktes sind 3, 2, 1 bzw. 2 Arbeitsstunden, 4, 3, 3 bzw. 4 Einheiten Holz und jeweils eine Einheit Metall erforderlich. Es stehen 225 Arbeitsstunden, 117 Einheiten Metall und 420 Einheiten Holz zur Verfügung. Der Gewinn des Herstellers beträgt 19 Euro pro Regal, 13 Euro pro Tisch, 12 Euro pro Stuhl und 17 Euro pro Bett. Zur Bestimmung eines optimalen Produktionsplans hat die OR-Abteilung folgendes LP aufgestellt:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 19x_1 & + & 13x_2 & + & 12x_3 & + & 17x_4 & & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 225 \\
& 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 420 \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 117 \\
& & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

und mittels des Simplex-Verfahrens gelöst. Die Optimallösung ist $\bar{x} = (39, 0, 48, 30)^T$ mit Zielfunktionswert 1827. Die optimale Basis ist $B = (1, 3, 4)$ und die Nichtbasis entsprechend $N = (2, 5, 6, 7)$. Die Inverse der Basismatrix lautet:

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Reoptimiere den Produktionsplan $x = (39, 0, 48, 30)^T$ der Möbelfirma mit den Methoden der Sensitivitätsanalyse , falls jeweils eine der folgenden Änderungen berücksichtigt werden soll:

(a) Es sollen höchstens doppelt so viele Regale wie Tische hergestellt werden.

(b) Der Gewinn pro Stuhl steigt von 12 auf 14 Euro.

(c) Der zur Verfügung stehende Vorrat an Holz verringert sich von 420 auf 400 Einheiten.

(d) Es werden zusätzlich noch Schränke hergestellt, die mit einem Gewinn von 15 Euro verkauft werden können. Zur Herstellung eines Schrankes werden 1 Arbeitsstunde, 2 Einheiten Metall und 2 Einheiten Holz benötigt.

(e) Durch die Anschaffung neuer Maschinen verringert sich die zur Herstellung eines Tisches nötige Arbeitszeit auf 1 Stunde.

(f) Wegen einer neuen Firmenstrategie sollen nicht mehr als 25 Regale und 10 Betten hergestellt werden.

Aufgabe H28 (Laufzeit) (5 Punkte)

Betrachte Algorithmus 2, der eine moderne Version des Euklidischen Algorithmus' zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen $a, b \in \mathbf{N}$ darstellt. Hat dieser eine polynomiale Laufzeit? Bei der Laufzeitanalyse können Vergleiche, Zuweisungen und modulo-Rechnung als elementare Rechenschritte angesehen werden.

Algorithm 2 Moderne Version des Euklidischen Algorithmus'

```
while b ≠ 0 do
    h ← a mod b
    a ← b
    b ← h
end while
out a
```