Einführung in die Optimierung
8. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Dr. Nicole Megow
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2011/2012
15.12.2011/ 16.12.2011

Gruppenübung

Aufgabe G27 (Phase I)
Löse das folgende LP mit dem Zwei-Phasen Simplex Algorithmus

$$\begin{array}{rrcl} \min & -x_1 - x_2 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 + 2x_2 & = & 6 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Aufgabe G28 (Basislösungen)
Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Zeige: Besitzt das obige LP eine nicht-degenerierte optimale Basislösung, so besitzt das dazu duale LP eine eindeutige Optimallösung.

Aufgabe G29 (Dualer Simplex)
Löse folgendes Optimierungsproblem mit dem dualen Simplex-Algorithmus. Zeige zunächst, dass die Schlupfvariablen x_5, x_6, x_7 eine Startbasis bilden.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 6x_4 & \leq & 14 \\ & -2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & \leq & -25 \\ & x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & \leq & 14 \\ & & & & & & x_1, x_2, & x_3, x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

Aufgabe G30 (Modellierung)

(a) Eine Nahrungsmittelfirma stellt aus Nüssen, Haferflocken und Rosinen drei Sorten Müsli (A,B,C) her. Die Mischungsverhältnisse sind wie folgt gegeben:

	A	B	C
Nüsse	2	3	1
Haferflocken	4	1	2
Rosinen	3	4	2

Eine Einheit Müsli A entält zwei Einheiten Nüsse, 4E Haferflocken und 3E Rosinen, usw.. Beim Verkauf einer Einheit Müsli A erzielt die Firma einen Gewinn von 5 EUR, der Verkauf von B bringt 4 EUR, der Verkauf von C 3 EUR Gewinn. Die Firma kann maximal 5000E Nüsse, 11000E Haferflocken und 8000E Rosinen beschaffen. Ein Produktionsplan mit maximalem Gewinn soll bestimmt werden.

Modellieren Sie diese Problemstellung als Optimierungsproblem. Geben Sie das duale Problem.

(b) Aufgrund der Lieferverträge muss die Firma mindestens dreimal so viel Einheiten Müsli C wie Müsli A herstellen. Wird weniger als 500E Müsli A produziert, dann soll die Produktion von Müsli B mindestens 250E betragen.

Modellieren Sie diese Anforderungen als zusätzliche Nebenbedingungen des Problems aus Aufgabenteil (a).

Hausübung

Aufgabe H24 (Dualer Simplex) (6 Punkte)

Löse folgendes Optimierungsproblem mit dem dualen Simplex-Algorithmus. Zeige zunächst, dass die Schlupfvariablen eine Startbasis bilden.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 3 \\ & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 4 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3, & \geq & 0. \end{array}$$

Aufgabe H25 (Basen für den dualen Simplex-Algorithmus) (9 Punkte)

Seien $b \in \mathbf{R}^m$, $c \in \mathbf{R}^n$ und $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit vollem Zeilenrang. Das duale LP (in der dualen Standardform) hat dann die Gestalt

$$\begin{array}{rrcl} \max & b^T y & & \\ \text{s.t.} & A^T y + Iz & = & c \\ & z & \geq & 0 \end{array} . \tag{1}$$

Sei $D := (A^T, I) \in \mathbf{R}^{n \times (m+n)}$. Eine Menge von Indizes $H \subset \{1, \dots, n+m\}$ heißt *Basis* von (1), wenn D_H regulär ist. Die zugehörige Basislösung ist dann $u_H := D_H^{-1} c$ und $u_{\{1,\dots,m+n\} \setminus H} := 0$. Eine Basis heißt *zulässig*, wenn $u_{H \cap \{m+1,\dots,m+n\}} \geq 0$ gilt, das heißt alle Einträge der Basislösung, die zu z gehören, sollen nichtnegativ sein.

Der duale Simplex-Algorithmus betrachtet nur zulässige Basen H mit der Eigenschaft $\{1, \dots, m\} \subset H$ und wählt aus diesen eine beste. Es soll gezeigt werden, dass mit dieser Vorgehensweise das Problem (1) gelöst wird. Gehe dabei wie folgt vor:

(a) Das Problem (1) in primaler Standardform lautet

$$\begin{array}{rrcl} \max & b^T y^+ - b^T y^- & & \\ \text{s.t.} & A^T y^+ - A^T y^- + Iz & = & c \\ & y^+, y^-, z & \geq & 0 \end{array} . \tag{2}$$

Zeige, dass zu jeder zulässigen Basis B von (2) eine zulässige Basis H von (1) mit gleichem Zielfunktionswert existiert.

(b) Das Problem (2) habe eine Optimallösung. Zeige, dass dann zu jeder zulässigen Basis B von (2) eine zulässige Basis $\tilde{B}$ existiert, deren Zielfunktionswert größer oder gleich dem von B ist, und die die Eigenschaft erfüllt, dass für alle $i \in \{1, \dots, m\}$

$$i \in \tilde{B} \quad \text{oder} \quad i + m \in \tilde{B} \tag{3}$$

gilt.

Tipp: Nimm o.B.d.A. an, dass für $i = 1$ die Bedingung (3) verletzt ist, das heißt weder y_1^+ noch y_1^- ist in der zulässigen Basis B. Betrachte die reduzierten Kosten von y_1^+ und y_1^-. Zeige anhand der Schritte FTRAN und Ratio-Test des Simplex-Algorithmus, dass y_1^+ oder y_1^- gegen ein z_i mit $i \in B$ ausgetauscht werden kann. Teile dazu γ im Ratio-Test in γ_1, γ_2 auf, wobei γ_1 das Minimum für die Indizes $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $B_k \leq 2m$ und γ_2 entsprechend das Minimum für die Indizes $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $B_k > 2m$ sei.

(c) Beweise mit Hilfe des bisher Gezeigten den folgenden Satz aus der Vorlesung: Das LP (1) habe eine Optimallösung. Dann gibt es eine optimale Basis H_{opt} mit $\{1, \dots, m\} \subseteq H_{\text{opt}}$.