Einführung in die Optimierung
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Nicole Megow
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2011/2012
08./09.12.2010

Gruppenübung

Aufgabe G23 (Relaxierungen)
Betrachte das folgende LP mit Ganzzahligkeitsbedingungen. Solche Probleme sind im Allgemeinen sehr schwierig zu lösen. Ersetzt man die Ganzzahligkeitsbedingungen $x_i \in \{0,1\}$ durch die linearen Nebenbedingungen $0 \leq x_i \leq 1$, erhält man die sogenannte *LP-Relaxierung* (R) von (IP), die wesentlich einfacher zu lösen ist:

$$(IP)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\dots,n \end{array} \qquad\qquad (R)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1,\dots,n \end{array}$$

Untersuche den Zusammenhang zwischen (IP) und (R):

(a) Was sagt der Optimalwert von (R) über den Optimalwert von (IP) aus?

(b) Im Allgemeinen erfüllt die Optimallösung von (R) nicht für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ die Bedingung $x_i \in \{0,1\}$. Was kann man für (IP) folgern, wenn dies zufällig doch der Fall ist?

(c) Was folgt aus der Zulässigkeit bzw. Unzulässigkeit von (R) für (IP)?

Aufgabe G24 (Komplementarität)
Gegeben sei folgendes LP

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \min & -7x_1 & - & 6x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & - & 2x_5 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\ & & & & & & & & & x_1,\dots,x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Prüfen Sie mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine Optimallösung des LPs ist. Geben Sie Ihre Rechenschritte an.

(b) Geben Sie ein Beispiel für $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ an, so dass x^* optimal für das obige LP mit der abgeänderten Zielfunktion $\min(c_1, -6, -5, 2, c_2)^T x$ ist.

(c) Ist x^* optimal für obiges LP mit der abgeänderten Zielfunktion $\min(-1, -3, -5, 2, -2)^T x$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe G25 (Basislösungen)
Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Zeige: Besitzt das obige LP eine nicht-degenerierte optimale Basislösung, so besitzt das dazu duale LP eine eindeutige Optimallösung.

Aufgabe G26 (Simplexalgorithmus)
Löse das folgende Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus. Beachte, dass das LP nicht in Standardform vorliegt.

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Starte im Punkt $x = (0,0,0)$.

Hausübung

Aufgabe H21 (Quotientenoptimierungsproblem) (8 Punkte)
Betrachte das Quotientenoptimierungsproblem

$$\text{(QOP)} \qquad \begin{aligned} \min\ & \tfrac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \\ \text{s.t.}\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

wobei $A \in \mathbf{R}^{m \times n}, c, d \in \mathbf{R}^n, b \in \mathbf{R}^m, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Die zulässige Menge, also das Polyeder $\mathscr{P} = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$, sei beschränkt. $c^T x + \alpha$ und $d^T x + \beta$ sollen keine gemeinsamen Nullstellen in $\mathscr{P}$ haben.

(a) Zeige: Wenn es Punkte $x_1, x_2 \in \mathscr{P}$ gibt mit

$$d^T x_1 + \beta < 0 \quad \text{und} \quad d^T x_2 + \beta > 0 \tag{$\star$}$$

dann ist die Zielfunktion von (QOP) auf $\mathscr{P}$ unbeschränkt.

Betrachte nun den Fall, dass sich das Vorzeichen des Nenners auf der zulässigen Menge nicht ändert, d.h. nimm o.B.d.A. an, dass $d^T x + \beta > 0$ für alle $x \in \mathscr{P}$ gilt.

(b) Durch die Variablentransformation $z = \frac{1}{d^T x + \beta}$ und $y = zx$ kann (QOP) in ein lineares Optimierungsproblem mit einer zusätzlichen Variablen und einer zusätzlichen Nebenbedingung umgewandelt werden. Formuliere dieses LP.

(c) Zeige: Ist $(\bar{y}, \bar{z})$ eine Optimallösung des LPs, dann gilt $\bar{z} > 0$.

(d) Zeige: Ist $(\bar{y}, \bar{z})$ eine Optimallösung des LPs, dann ist $\bar{x} = \frac{1}{\bar{z}} \bar{y}$ eine Optimallösung von (QOP).

Aufgabe H22 (Simplexalgorithmus) (4 Punkte)
Lösen Sie das folgende lineare Programm:

$$\begin{aligned} \max\ & 20x_1 + 9x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 \leq 120 \\ & x_2 \leq 70 \\ & x_1 + x_2 \leq 140 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Löse das Programm mit dem Simplexverfahren für den Startpunkt $(40, 70)$. Erstelle eine Skizze des Polyeders, das das LP beschreibt und zeichne jede Basislösung ein. Interpretiere jeden Basisaustauschschritt anhand der Zeichnung.

Aufgabe H23 (Modellierung) (3 Punkte)
Ein Landwirt möchte höchstens 100 ha Land bepflanzen, und zwar mit Kartoffel, Weizen und Rüben. Die benötige Daten sind in folgender Tabelle zusammengefaßt

	Kartoffel	Weizen	Rüben	Zur Verfügung stehen
Anbaukosten [TDEu/ha]	1	2	1	110 TDEu
Arbeitstage [Tg/ha]	1	3	2	160 Arb.Tg.
Reingewinn [TDEu/ha]	13	12	14	

Wie viel ha soll er mit Kartoffel, wie viel mit Weizen und wie viel mit Rüben bepflanzen, um einen optimalen Gewinn zu erzielen?

(a) Man erstelle ein mathematisches Modell und ermittle einen Maximierer mit Hilfe einer Skizze im $\mathbf{R}^3$.

(b) Wie lautet das Modell in Standardformat? Man gebe die Koordinaten des Maximierers für das Standardformat an!

(c) Geben Sie das duale Problem an.