Einführung in die Optimierung
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Nicole Megow
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2011/2012
01./02.12.2010

Gruppenübung

Aufgabe G20 (Zwei Kegel, die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen und der Schlupf)
Betrachte die folgenden zueinander dualen Probleme:

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad \text{(D)} \quad \begin{array}{rl} \max & -b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y = -c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

und die beiden Kegel

$$\mathscr{N}(x) = \operatorname{cone}(A^T_{\mathrm{eq}(\{x\})\cdot}) = \left\{ \sum_{i \in \mathrm{eq}(\{x\})} \lambda_i A^T_{i\cdot} \mid \lambda_i \geq 0 \text{ für alle } i \in \mathrm{eq}(\{x\}) \right\},$$
$$\mathscr{X}(x) = \left\{ r \in \mathbf{R}^n \mid A_{\mathrm{eq}(\{x\})\cdot} r \leq 0 \right\}.$$

(a) Veranschauliche die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (Satz 4.12) anhand einer Skizze. Zeichne dazu ein zweidimensionales Polyeder, wähle eine Ecke q und einen inneren Punkt p einer Kante und skizziere jeweils die Kegel $\mathscr{N}$ und $\mathscr{X}$. Für welche c ist q beziehungsweise p eine Optimallösung?

(b) Formuliere die KKT-Bedingungen unter Verwendung von $\mathscr{N}(x)$.

(c) Skizziere einen Fall, in dem x und c so gewählt sind, dass kein y die starke Komplementarität erfüllt.

Aufgabe G21 (Komplementärer Schlupf)
Gegeben sei das lineare Programm (LP):

$$\begin{array}{rll} \min & x_1 - x_3 & \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 & \leq 5 \\ & x_2 + 2x_3 & = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0. \end{array}$$

(a) Bestimme das dazugehörige duale lineare Programm (DLP).

(b) Stelle die Bedingung des komplementären Schlupfes für die Programme auf und benutze diese, um (LP) und (DLP) zu lösen.

(c) Finde ein, möglichst kleines, Beispiel für ein Optimierungsproblem, bei dem es eine Optimallösung $\bar{x}, \bar{y}$ gibt, in der die Äquivalenzen des Satzes vom starken komplementären Schlupf gelten, und eine Optimallösung $\hat{x}, \hat{y}$, in der die Äquivalenzen nicht gelten. Gib $\bar{x}, \bar{y}$ und $\hat{x}, \hat{y}$ an.

Aufgabe G22 (Modellierung)
Gegeben sei das Hängegerüst wie in Abbildung 1. Die Seile S_1 und S_2 können je 300kg Last, die Seile S_3 und S_4 je 100kg und die Seile S_5 und S_6 jeweils 50kg Last tragen. Unter Vernachlässigung des Gewichts der Seile und der Bohlen soll das maximal zulässige Gesamtgewicht $y_1 + y_2 + y_3$ für die Lasten gefunden werden.

(a) Formuliere dieses Problem als lineares Programm.

(b) Stelle das dazugehörige duale lineare Programm auf und diskutiere die Bedeutung einer Optimallösung.

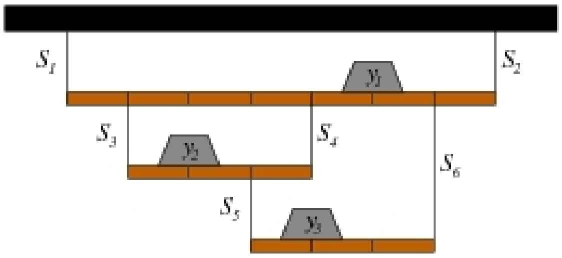

Abbildung 1: Gerüst zu Aufgabe G22

Hausübung

Aufgabe H18 (Schwache Dualität) (6 Punkte)

Was ist an der folgenden Argumentation falsch? Gib für jede Abschätzung an, ob und warum sie richtig oder falsch ist.
Es gilt (durch Anwendung von schwacher Dualität bzw. einfacher Abschätzungen):

$$\begin{aligned}
\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} &\leq \min\{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\} && (1)\\
&\leq \max\{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\} && (2)\\
&\leq \min\{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} && (3)\\
&\leq \max\{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} && (4)\\
&\leq \min\{y^T b : y^T A \leq c^T, y \leq 0\} && (5)\\
&\leq \max\{y^T b : y^T A \leq c^T, y \leq 0\} && (6)\\
&\leq \min\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} && (7)\\
&\leq \max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} && (8)
\end{aligned}$$

Also gilt überall Gleichheit, insbesondere zwischen den letzten beiden Zeilen, und es macht keinen Unterschied, ob man maximiert oder minimiert.

Aufgabe H19 (Komplementärer Schlupf) (6 Punkte)

Seien $P = P(A, b)$ ein Polyeder und $F = \{x \in P \mid c^T x = \gamma\}$ eine nicht-leere Seitenfläche von P. Dann gilt:

$$\mathrm{eq}(F) = \{i \in M \mid \exists u \geq 0, u_i > 0 : u^T A = c^T, u^T b = \gamma\}.$$

Lösungshinweis: Betrachten Sie das lineare Programm $\max\{c^T x \mid Ax \leq b\}$. Dann ist F die Menge der Optimallösungen von LP. Verwenden Sie die Sätze vom komplementären Schlupf.

Aufgabe H20 (Modellierung) (3 Punkte)

Das Zweigwerk der Stahlmöbel GmbH produziert nur Schreibtische und Stahlschränke. Die vorgeschnittenen Stahlbleche werden jeweils in drei aufeinander folgenden Betriebsabteilungen A_1, A_2 und A_3 bearbeitet. Die für einen Planungsmonat verfügbaren Kapazitätet betragen:

- in A_1: 900 h
- in A_2: 2100 h
- in A_3: 1000 h

Zur Produktion eines Schreibtisches bzw. eines Stahlschrankes werden im einzelnen folgende Bearbeitungszeiten (Angabe in h/Stück) benötigt:

	A_1	A_2	A_3
Schreibtisch	3	7,5	2,5
Stahlschrank	3	5	5

Die variablen Kostensätze pro Wekrstattstunde in den Abteilungen betragen (Euro/h):

- in A_1: 10 Euro/h
- in A_2: 15 Euro/h
- in A_3: 20 Euro/h

Die sonstigen variablen Kosten (Materialeinsatz, Energie etc.) betragen

- pro Schreibtisch: 60 Euro/Stückpreis
- pro Stahlschrank: 70 Euro/Stückpreis

Das Zweigwerk liefert die monatliche Produktion zu vorgegebenen Preisen von 550 Euro/Schreibtisch und 560 Euro/Stahlschrank an eine konzerneigene Vertriebsgesellschaft. Der Leiter des Zweigwerkes ist von der Konzernleitung angewiesen worden, höchstens 210 Schreibtische und höchstens 160 Stahlschränke pro Monat zu produzieren. Innerhalb dieses Raumes soll er das Sortiment von Schreibtischen und Stahlschränken so zusammenstellen, dass ein maximaler Gewinn entsteht.

(a) Erstellen Sie ein mathematisches Modell für das Problem.

(b) Ermitteln Sie eine Optimallösung des Problems mit Hilfe einer Skizze im $\mathbf{R}^2$

(c) Geben Sie andere Zielfunktionen an für die Fälle:

  i. Es existiert genau eine Lösung

  ii. Es exitieren unendlich viele Lösungen

  iii. Es exiestiert keine Lösung.

(d) Bringen Sie das LP aus det Teilaufgabe (a) in Standartform und geben Sie das duale Problem an.