# Einführung in die Optimierung
# 5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Dr. Nicole Megow**
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

**WS 2011/2012**
**24./25.11.2011**

## Gruppenübung

**Aufgabe G16** (Duale Programme)
Gegeben sei das folgende lineare Problem

$$
(P) \qquad \begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\min & 7x_1 & - & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
& 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
& 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
& & & & & & & & & x_1,\dots,x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Formuliere das duale Problem zu (P).
*Hinweis*: Bringe (P) zunächst in natürliche Form.

**Aufgabe G17** (Farkas-Lemma)
Beweise: Seien $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$. Dann hat genau eines der beiden folgenden Systeme eine Lösung:

$$
Ax \leq b \qquad \dot{\bigvee} \qquad \begin{array}{rcl} y^T A & = & 0 \\ y & \geq & 0 \\ y^T b & < & 0. \end{array}
$$

**Aufgabe G18** (Lineare Programme)

(A) Betrachte das Polyeder $\mathscr{P} := \{x \in \mathbf{R}^n : a_i^T x \leq b, i = 1,\dots,m\}$. In $\mathscr{P}$ soll eine möglichst große Kugel $\mathscr{B}$ mit Mittelpunkt $x_c \in \mathscr{P}$ eingeschrieben werden, d.h.

$$\mathscr{B} = \{x_c + u : \|u\|_2 \leq r\}.$$

Formuliere diese Problemstellung als lineares Problem in $x_c$ und $r$.

(B) Sei $A \in \mathbf{R}^{m\times m}$ nichtsingulär und $b, c \in \mathbf{R}^m$. Betrachte das LP

$$
\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{array}
$$

und zeige, dass für den Optimalwert $p^*$ gilt:

$$
p^* = \begin{cases} c^T A^{-1} b & \text{falls } A^{-T} c \leq 0 \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}
$$

(C) Seien $c, \ell, u \in \mathbf{R}^n$ und sei $\ell \leq u$. Gib eine explizite Lösung für folgendes LP an:

$$
\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & \ell \leq x \leq u \end{array}
$$

**Aufgabe G19** (Modellierung)
Lässt sich das folgende Optmierungsproblem als LP formulieren? Wenn ja, dann gib eine solche Formulierung an. Wenn nicht, begründe dies.

$$\begin{array}{rrcl} \min & \max\{x_1, x_4\} & & \\ \text{s.t.} & |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| & \leq & 10 \\ & \max\{x_1, x_2\} & \leq & \min\{x_3, x_4\} \\ & \dfrac{x_2 - x_4}{x_1 + x_3 + 1} & \leq & 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

## Hausübung

**Aufgabe H14** (Zulässige Richtungen) (5 Punkte)
Beweise oder widerlege den folgenden Satz:
$\bar{x}$ ist genau dann Optimallösung von

$$\begin{array}{rl} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{array} \tag{1}$$

$A \in \mathbf{R}^{m,n}$, $b \in \mathbf{R}^m$, wenn gilt:

$$\begin{array}{r} A\bar{x} = b \\ \bar{x} \geq 0 \\ c^T s \leq 0 \ \forall s \in \mathscr{Z}(\bar{x}) := \{s : As = 0,\, s_{\{1,\dots,n\}\setminus \operatorname{supp}(\bar{x})} \geq 0\}. \end{array} \tag{2}$$

**Aufgabe H15** (Farkas-Lemma) (5 Punkte)
Beweise: Für dimensionsverträgliche Matrizen $A, B, C$ und $D$ sowie Vektoren $a, b, u$ und $v$ hat genau eines der beiden folgenden Systeme eine Lösung:

$$\begin{array}{rcrcl} Ax & + & By & \leq & a \\ Cx & + & Dy & = & b \\ x & & & \geq & 0 \end{array} \quad \dot{\bigvee} \quad \begin{array}{rcrcl} u^T A & + & v^T C & \geq & 0 \\ u^T B & + & v^T D & = & 0 \\ u & & & \geq & 0 \\ u^T a & + & v^T b & < & 0. \end{array}$$

**Aufgabe H16** (Modellierung) (3 Punkte)
In einem Unternehmen mit Kuppelproduktion werden aus den Rohstoffen $R_i$, $i = 1, 2, 3$, die Zwischenprodukte $Z_j$, $j = 1, 2$ hergestellt und daraus die Fertigprodukte $P_k$, $k = 1, 2$ angefertigt. Die Fertigungsstruktur ist in nachstehenden Inputmatrizen beschrieben (zur Herstellung einer ME von $P_1$ werden 3 ME von $Z_1$, 2 ME von $Z_2$ und 0 ME von $Z_3$ benötigt; analog sind übrigen Matrixeinträge zu interpretieren). Die Verkaufspreise für die Fertigprodukte, die Einkaufspreise für die Rohstoffe sowie die Mengenbegrenzungen für die Rohstoffe (in dem betrachteten Planungszeitraum von einem Monat) sind in folgender Tabelle angegeben:

| Produkt | Ein- bzw. Verkaufspreis (GE/ME) | Maximale Einkaufsmenge (ME) |
|---|---|---|
| $P_1$ | 36 | – |
| $P_2$ | 40 | – |
| $R_1$ | 2 | 48 |
| $R_2$ | 1 | 58,5 |
| $R_3$ | 3 | 20 |

| | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | 3 | 2 | 0 |
| $P_2$ | 1 | 2 | 1 |

| | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|
| $Z_1$ | 2 | 3 | 0 |
| $Z_2$ | 1 | 0 | 1 |
| $Z_3$ | 0 | 6 | 1 |

Welche Mengen von $P_1$ und $P_2$ sollen in dem genannten Planungszeitraum hergestellt werden, damit die Summe der Deckungsbeträge maximiert wird? (Mathematisches Modell, Lösung mit Hilfe einer Skizze)

(a) Formulieren Sie ein mathematisches Modell

(b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe einer Skizze

(c) Geben Sie das duale Problem an.

*Hinweis:* Für das Produkt $P_k$ gilt: Deckungsbeitrag/ME=Verkaufspreis/ME minus Einkaufspreis der Rohstoffe, die in eine ME von $P_k$ eingehen.

**Aufgabe H17** (Modellierung) (2 Punkte)
In praktischen Anwendungen sind Problemdaten oft nicht exakt bekannt, sondern nur mit einer gewissen Fehlertoleranz. Betrachten wir dies am Beispiel der Nebenbedingungsmatrix $A$ eines linearen Problems: Für die Komponenten von $A$ seien obere und untere Schranken bekannt, d.h. es sind $B$ und $V$ gegeben, sodass

$$A \in \mathscr{A} = \left\{ A \in \mathbf{R}^{m \times n} \mid B_{ij} - V_{ij} \leq A_{ij} \leq B_{ij} + V_{ij} \text{ für alle } i = 1, \ldots, m \text{ und } j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Es soll nun eine Optimallösung gefunden werden, die für jede Nebenbedingungsmatrix $A \in \mathscr{A}$ zulässig ist, d.h. wir betrachten das Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax \leq b & \text{für alle } A \in \mathscr{A}. \end{array}$$

Formulieren Sie dieses als LP. Geben Sie das duale Problem an.