Einführung in die Optimierung
3. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Dr. Nicole Megow
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

WS 2011/2012
10/11.November 2011

Gruppenübung

Aufgabe G8 (Polyeder)
Betrachte das Polyeder $\mathscr{P}$, das durch die folgenden Ungleichungen gegeben ist:

$$x_1 + 2x_2 \geq 1, \qquad -x_1 \leq 1, \qquad x_1 - x_2 \geq -3,$$
$$x_2 \geq 1, \qquad -2x_1 - x_2 \leq 0.$$

(a) Fertige eine Skizze von dem Polyeder an.

(b) Bestimme anhand der Skizze alle Ecken, Kanten, und Facetten des Polyeders und gib jeweils die Ungleichungen an, die die jeweilige Seitenfläche induzieren.

(c) Finde eine Matrix A und einen Vektor b, sodass $\mathscr{P} = \mathscr{P}(A,b)$ gilt und das System $Ax \leq b$ irredundant ist.

(d) Finde eine Matrix B und einen Vektor c, sodass $\mathscr{P}$ äquvalent zu $\mathscr{P}^{=}(B,c)$ ist. Gilt $\mathscr{P} = \mathscr{P}^{=}(B,c)$?

Aufgabe G9 (Polyeder?)
Welche der folgenden Mengen sind Polyeder? Beweise oder widerlege:

(a) $\mathscr{M}_1 := \left\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid a_1^T X a_1 \leq a_2^T X a_2\right\}$, mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$,

(b) $\mathscr{M}_2 := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\, e^T x = 1,\, \sum_{i=1}^n x_i a_i = b_1,\, \sum_{i=1}^n x_i a_i^2 = b_2\right\}$, mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. e sei der Vektor in $\mathbb{R}^n$, dessen Komponenten alle gleich 1 sind,

(c) $\mathscr{M}_3 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\, x^T y \leq 1$ für alle y mit $\|y\|_2 = 1\}$.

Aufgabe G10 (Modellierung)
Ein Unternehmen stellt zwei Gürteltypen A und B her. A ist von besserer Qualität als B. Der Nettogewinn beträgt bei A 2 Geldeinheiten und bei B 1.50 Geldeinheiten. Der Zeitaufwand für die Produktion eines Gürtels vom Typ A beträgt 2 Zeiteinheiten. Für den Typ B wird 1 Zeiteinheit pro Gürtel benötigt. Täglich stehen maximal 1000 Zeiteinheiten zur Verfügung. Die Lederbelieferung erlaubt eine Produktion von 800 Gürteln pro Tag, egal um welchen Typ es sich handelt. Außerdem stehen pro Tag höchstens 400 Schnallen für den Typ A und 700 Schnallen für den Typ B zur Verfügung. Wie soll die Produktion aufgeteilt werden, damit ein maximaler Gewinn erzielt wird? Modelliere diese Problemstellung als Optimierungsproblem und löse es graphisch.

Aufgabe G11 (Total unimodulare Matrizen)
Eine Matrix $A \in \{-1,0,1\}^{m\times n}$ heißt total unimodular, wenn für jede quadratische Untermatix A' von A (d.h. A' ist durch Streichen von Zeilen und Spalten aus A hervorgegangen) gilt:

$$\det(A') \in \{-1,0,1\}.$$

Seien A total unimodular und $b \in \mathbb{Z}^m$. Beweise: Ist A total unimodular, dann hat das Polyeder $P^{=}(A,b)$ nur ganzzahlige Ecken.
Lösungshinweis: Verwende (A) auf einen Eckpunkt x. In $A_{.\,\mathrm{supp}(x)}$ findest Du dann eine geeignete quadratische Untermatrix $A_{I\,\mathrm{supp}(x)}$. Stelle x als Lösung des Gleichungssystem $A_{I\,\mathrm{supp}(x)} x_I = b_I$ dar. Dieses Gleichungssystem lässt sich mittels der Cramerschen Regel analysieren – was fällt an den dort vorkommenden Determinanten auf?

Hausübung

Aufgabe H7 (Kegel) (3 Punkte)

Eine Menge $\mathscr{K}$ heißt *Kegel*, wenn mit $x \in \mathscr{K}$ auch $\alpha x \in \mathscr{K}$ für jede Zahl $\alpha \geq 0$. Beweise oder widerlege:

(a) Sei $\mathscr{K}$ ein Kegel. Es gilt $x + y \in \mathscr{K}$ für alle $x, y \in \mathscr{K}$ genau dann, wenn $\mathscr{K}$ konvex ist.

(b) Jeder Kegel hat höchstens einen Extrempunkt, nämlich den Ursprung.

(c) Ein polyedrischer Kegel der Form $\mathscr{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$) hat genau einen Extrempunkt, nämlich den Ursprung.

Aufgabe H8 (Träger) (3 Punkte)

Wir definieren den Träger von $x \in \mathbb{R}^n$ als $\operatorname{supp}(x) = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \ : \ x_i \neq 0\}$. Beweise:

Für $x \in P^{=}(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) *x ist eine Ecke von $P^{=}(A, b)$.*

(2) $\operatorname{rang}(A_{\cdot \operatorname{supp}(x)}) = \left|\operatorname{supp}(x)\right|$.

(3) *Die Spaltenvektoren $A_{\cdot j}$, $j \in \operatorname{supp}(x)$, sind linear unabhängig.*

Aufgabe H9 (Umformulierungen) (6 Punkte)

(A) Betrachte die konvexe Funktion $f(x) = \max\{c^T x + \alpha, d^T x + \beta\}$. Formuliere das Optimierungsproblem

$$\min\{f(x) : Ax = b, x \geq 0\}$$

als lineares Problem (lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen). Dabei seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, d \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(B) Zum näherungsweisen Lösen überbestimmter Gleichungssysteme $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$, wird oft ein Optimierungsproblem formuliert, in dem das Residuum bezüglich einer gegebenen Norm minimiert werden soll:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$$

Formuliere dieses Problem als lineares Programm für:

(a) Die Maximumnorm

$$\|v\|_\infty := \max_{i=1 \ldots m} |v_i|$$

(b) Die Summennorm

$$\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{m} |v_i|$$

(C) Betrachte das Polyeder $\mathscr{P}$, das durch die folgenden Ungleichungen gegeben ist:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 7x_3 &\leq -10 \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 &\leq -20 \\ 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 &\leq -30 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq -40 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &\leq -50 \end{aligned}$$

Stelle das System in der Normalform ($Ax = b, x \geq 0$) dar.

Aufgabe H10 (Modellierung) (3 Punkte)

Eine Firma hat sich auf die Fertigung zwei spezieller Computertypen spezialisiert, Computer mit Ein-Prozessor-System (1 CPU) und Computer mit Zwei-Prozessor-System(2 CPU's). Pro Woche können von den Ein-Prozessor-Systemen maximal 120 Stück hergestellt werden, von den Zwei-Prozessor-Systemen maximal 70 Stück. Insgesamt können pro Woche nur 140 Computer hergestellt werden und es stehen pro Woche höchstens 180 CPU's zur Verfügung.

(a) In welcher Weise muss produziert werden, damit der Gesamtgewinn maximal ist, wenn ein Ein-Prozessorsystem 150 Euro Gewinn einbringt und ein Zwei-Prozessor-System 450 Euro Gewinn einbringt? Stell das lineare Programm auf und löse es graphisch.

(b) Im folgenden Monat sinkt der Gewinn für Zwei-Prozessor-Systeme von 450 auf ebenfalls 150 Euro. Wie ändert sich der maximale Gesamtgewinn des Betriebes?